proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario

Áreas: Biología, Física, Matemática y Química

Ministerio de Educación
Presidencia de la Nación

Instituto Nacional Formación Docente

SPU Secretaría de Políticas Universitarias

Presidenta de la Nación
Dra. Cristina FERNÁNDEZ DE KIRCHNER

Ministro de Educación
Prof. Alberto SILEONI

Secretaria de Educación
Prof. María Inés ABRILE DE VOLLMER

Secretario General del Consejo Federal de Educación
Prof. Domingo DE CARA

Secretario de Políticas Universitarias
Dr. Alberto DIBBERN

Directora Ejecutiva del Instituto Nacional de Formación Docente
Lic. Graciela LOMBARDI

Área Desarrollo Institucional del INFD
Coordinadora Nacional: Lic. Perla FERNÁNDEZ

Área Formación e Investigación del INFD
Coordinadora Nacional: Lic. Andrea MOLINARI

Asesora Secretaría de Políticas Universitarias
Prof. María Rosa DEPETRIS

Asesora Secretaría de Políticas Universitarias
Lic. Mariana FERNÁNDEZ

Coordinadora del Proyecto de Mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario
Lic. Paula POGRÉ

Diseño y Diagramación
Pablo Gregui

Corrección de estilo y edición general
Cecilia Rodrìguez

Instituto Nacional de Formación Docente
Lavalle 2540 3ª Piso (C1205AAF) - Ciudad de Buenos Aires - Teléfono: 4959-2200
www,.me.gov.ar/infod - e-mail: infod@me.gov.ar

Contenidos

Presentación de los documentos

1. Una escuela secundaria que requiere repensar la formación de sus profesores

La obligatoriedad de la escuela secundaria abre un nuevo horizonte que nos convoca a repensar la formación de sus profesores con una perspectiva aún más desafiante que la que sin dudas se impone hace años en muchos países preocupados por el fracaso en el aprendizaje de los jóvenes, la rigidización de las formas de enseñar, la obsolescencia de algunos contenidos y la pérdida de sentido de este ciclo para docentes y estudiantes.

La secundaria de hoy desafía el carácter selectivo y las trayectorias escolares interrumpidas que caracterizaron al nivel medio. Tiene también el desafío de encontrar nuevos y diferentes caminos para constituirse en el espacio de la transmisión y recreación de conocimientos valiosos para los jóvenes y para la sociedad.

El mandato social actual renueva la confianza en la escuela como lugar privilegiado para la inclusión a través del conocimiento y para la concreción de una experiencia educativa donde el encuentro con los adultos permita la transmisión del patrimonio cultural y la enseñanza de los saberes socialmente relevantes para la construcción de una sociedad en la que todos tengan lugar y posibilidades de desarrollo.

Para ello, los docentes y las escuelas deben encaminarse hacia la construcción de formas de escolarización que reconozcan las características de la etapa adolescente y juvenil en sus diversas formas de expresión, para incluir efectivamente a los jóvenes y acompañarlos en la construcción de su proyecto de futuro.

La formación inicial y continua de los docentes constituye una de las estrategias fundantes para hacer frente al nuevo mandato social pero ¿qué docentes queremos formar y cómo lo haremos?

Uno de los debates de las últimas décadas ha planteado el siguiente interrogante: ¿qué peso y espacio asignar en la formación de los profesores de secundaria a los contenidos disciplinares específicos, a la denominada formación de fundamento y a la formación didáctico pedagógica? Diversas investigaciones (Martin,1999; Pogré, 2003, 2005; Robalino & Corner 2006) dan cuenta de que lo que hace la diferencia en la formación no es el quantum de cada uno de estos campos sino el modo en que estos se articulan en los procesos formativos.

Por esta razón, y para aportar a los debates y las decisiones que se tomarán en un futuro próximo en relación a las propuestas formativas para los profesores de secundaria, es que hemos convocado, a un trabajo articulado entre la Secretaría de Políticas Universitarias (SPU) y el Instituto Nacional de Formación Docente (INFD), a especialistas de Instituciones Superiores de Formación Docente y de las Universidades Nacionales de todo el país para repensar la formación inicial.

Para la elaboración de este documento, que se plantea como base para la discusión y revisión de los diseños curriculares de la formación, nos propusimos hacer foco en el proceso de aprendizaje de los futuros profesionales de la enseñanza, identificar las comprensiones necesarias y el tipo de experiencias formativas que es importante que transiten para construirlas, así como encontrar descriptores claros que permitan acompañar los procesos formativos.

Este documento no prescribe una malla curricular, es decir, no está proponiendo ni nombres de materias ni cargas horarias para cada una de ellas, sino que presenta, como producto de un consenso, los saberes importantes a ser construidos y que, desde las políticas públicas, las instituciones formadoras deberían comprometerse a garantizar con diseños posiblemente diferentes en términos de los espacios curriculares que se consoliden en los planes de formación.

2. El proceso de trabajo

2.1 Conformar equipos integrados por especialistas de los ISFD y las Universidades para trabajar juntos articulando voces y experiencias

Para la producción de este documento, la SPU y el INFD convocaron de manera conjunta a las instituciones formadoras (Universitarias y ISFD de todo el país) a que postulen especialistas disciplinares para conformar un primer equipo de trabajo que tendría el desafío de producir el documento que hoy estamos poniendo a disposición.

Para la conformación de los equipos, la comisión que seleccionó a los integrantes tuvo en cuenta no sólo que sus perfiles fuesen acordes a la convocatoria sino que hubiese pluralidad de voces, experiencias y pertenencias institucionales. En este proceso, fue muy importante el apoyo del CUCEN y de las Direcciones de Educación Superior de las provincias.

Los equipos convocados participaron durante seis meses en tres talleres presenciales intensivos y cada uno generó un dispositivo para mantener el contacto permanente on line, además de encuentros por sub equipos que se generaron en cada área.

El proceso de elaboración de los documentos incluyó diferentes espacios de consulta. Se recibieron aportes tanto de colegas de las instituciones a las que pertenecen los integrantes de los equipos como de otros especialistas de todos el país. La versión que hoy ponemos a disposición tiene incorporadas muchas de estas voces.

2.2 Las preguntas convocantes

Ante una revisión de planes de estudio, las preguntas más frecuentes suelen ser dos: ¿qué enseñar a los futuros profesores en la formación inicial? o ¿qué espacios curriculares deben incluirse y con qué cargas horarias?

En esta convocatoria se propuso cambiar el eje de la pregunta y elaborar un documento que permitiese comunicar acuerdos en torno de qué debe comprender de su campo disciplinar un futuro profesor en su formación inicial.

Esta pregunta implica entender que los profesores deben adquirir en su formación el dominio de determinados marcos conceptuales rigurosos que los habiliten tanto para seguir profundizando en la disciplina como para poder transformar estos conocimientos en contenidos a ser enseñados.

Formular la pregunta desde esta perspectiva implica partir de diferentes asunciones:

a) La formación inicial es parte de un proceso de desarrollo profesional continuo. Esto implica que la formación docente está marcada por las propias experiencias como alumno, comienza con el ingreso a la institución formadora, continúa luego de graduado en el proceso de socialización profesional y se desarrolla a lo largo de toda la vida profesional.

b) Aceptar la idea de desarrollo profesional no implica restar el valor fundamental de la formación inicial. La posibilidad de un desarrollo profesional autónomo, crítico y riguroso se basa en sólidas comprensiones construidas en el proceso de formación inicial.

Partiendo de estas premisa fue necesario formular una segunda pregunta: una vez que definimos los alcances de las comprensiones deseables en la formación inicial, ¿qué tipo de experiencias debe transitar un futuro profesor, durante esta formación, para apoyar el tipo de comprensiones que definimos?

Sabemos que muchas propuestas interesantes ,que establecen contenidos para la formación, se chocan luego con los modos en que estos contenidos son enseñados y aprendidos. Consecuentemente el equipo convocado hizo el doble esfuerzo: no sólo de establecer acuerdo acerca de los marcos disciplinares importantes a ser comprendidos y el alcance de estas comprensiones durante la formación inicial, sino también, de reflexionar y compartir el tipo de experiencias requeridas para construir tales comprensiones.

Quienes colaboramos en la producción de estos documento somos conscientes de que para la formación de un docente no basta con transmitir conceptos disciplinares actualizados y una nueva teoría de la enseñanza, lo que se busca es la apropiación de concepciones educativas reflexivas que generen otras maneras de enseñar y de actuar en el marco de las instituciones educativas. Se pretende formar un docente autónomo, capaz de trabajar en equipo, con dominio disciplinar y un fuerte compromiso ético y técnico con los resultados de aprendizaje de sus alumnos

Por lo tanto, afirmamos que la nueva formación requiere la revisión de la articulación entre contenidos así como poner en discusión el tipo de experiencias que las instituciones formadoras están proporcionando a los futuros docentes para poder construir una comprensión profunda tanto de los contenidos disciplinares como de la complejidad de la tarea de enseñar en las instituciones educativas.

Las experiencias formativas que ha de brindar la nueva formación docente habrán de favorecer la comprensión de los temas centrales de cada campo en lugar de pensar en la mera acumulación de contenidos y pensar también en los desafíos que se enfrentarán al intentar enseñar de manera significativa esos contenidos a una diversidad de jóvenes que habitan y habitarán las aulas de la secundaria.

> "Un tema central y bastante estudiado es el de "aprendizaje docente". Este tema pone el acento en un enfoque de la formación que se refiere al proceso personal de construcción de identidad que debe realizar cada futuro docente, a la construcción de la base conceptual necesaria para enseñar y a la construcción de un repertorio de formas docentes apropiadas para las situaciones de enseñanza que deberá enfrentar. Como se advierte este enfoque se contrapone al concepto de "preparación específica para algo" y en lo posible con herramientas a prueba de fuego. Más bien, sostiene que el aprendizaje docente es una tarea que cada profesor comienza durante el período de su formación inicial, sigue con cierto nivel de inseguridad en los primeros dos o tres años de docencia y continua haciendo durante el resto de su vida profesional, aun cuando el aprendizaje del experto cambie en términos de focos de atención o necesidades" (Ávalos, 2005, p.14).

Finalmente intentamos explicitar un conjunto de descriptores que den cuenta de que las comprensiones esperadas son alcanzadas por los docentes en formación. Por ello, acordamos tres momentos para lo que denominamos *mapas de progreso*. El primer momento lo establecimos al promediar la formación; el segundo, en el momento del egreso y, finalmente, incluimos indicadores que den cuenta de que la comprensión ha sido alcanzada en el escenario del aula, es decir, cuando este docente en formación comienza a desempeñarse en la vida profesional. Este último momento, que consideramos fundamental, se inicia con las residencias y se extiende hasta primeros 5 años de su ejercicio. O sea no sólo nos importó describir la comprensión y el proceso de apropiación disciplinar sino también cómo esta comprensión se evidencia en el desempeño docente.

3. La tarea, el contenido de los documentos

Tal como anticipamos, los equipos comenzaron a trabajar a partir de tres preguntas disparadoras:

- ¿Qué es lo que realmente importa que los futuros docentes comprendan del campo disciplinar?
- ¿Qué tipo de experiencias debería transitar un futuro profesor durante su formación para que alcance la comprensión deseada?
- ¿Cómo sabemos, tanto los formadores de profesores como los estudiantes del profesorado, que están construyendo comprensión?

Para dar posibles respuestas a estas cuestiones, los cuatro documentos que aquí se presentan se estructuran comunicando:

- Un marco que explicita posiciones desde las cuales se formulan respuestas a las preguntas;

- Un conjunto de núcleos problematizadores que vertebran la comprensión de cada área para la formación docente inicial.

Ademas, para cada núcleo se explicitan:

- El enunciado de objetivos de aprendizaje que establecen el alcance y profundidad de la comprensión esperada
- Una propuesta de experiencias de aprendizaje que sería recomendable se proponga a los estudiantes de profesorado para el logro de tales objetivos. Esta propuesta se establece con la intención de mostrar algunos tipos de tareas, sin pretensión de exhaustividad.
- Matrices que explicitan criterios de evaluación y sus descriptores que permitirían identificar mapas de progreso del aprendizaje de los estudiantes.

Paula Pogré

Matemática

- Verónica Cambriglia (Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires)
- Silvia Graciela Caputo (Instituto Superior de Formación Docente "Dr. Juan Pujol", Corrientes)
- Gustavo Fabián Carnelli (Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento)
- Ana Matilde Ceccarini (Instituto Superior de Formación Docente "Antonio Ruiz de Montoya", Misiones)
- Silvia Catalina Etchegaray (Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales, Universidad Nacional de Río Cuarto)
- Lidia Ester Ibarra (Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta)
- Angela PierinaLanza (Instituto Nacional Superior del Profesorado "Joaquín V. González", CABA)
- Ana María Mántica (Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral)
- Silvia Marzoratti (Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires)
- Mirta Nieva (Instituto de Enseñanza Superior "Monteros", Tucumán)
- Nélida Haydée Pérez (Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales, Universidad Nacional de San Luis,)
- Sara Scaglia (Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral)
- María Selva Serrano (Instituto de Enseñanza Superior "Monteros", Tucumán)
- Guadalupe Emilce Sinelli (Instituto Superior de Formación Docente N°14, Neuquén)
- Guillermina Emilia Vosahlo (Instituto Superior de Formación Docente "Aguilares", Tucumán)
- Nora Margarita Zon (Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales, Universidad Nacional de Río Cuarto)

- Coordinación: Mabel Alicia Rodríguez (Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento)

Agradecimientos

Agradecimientos a los organizadores de encuentros o jornadas de trabajo.

Agradecemos a los organizadores de los siguientes encuentros o jornadas de trabajo quienes nos han dado un espacio para presentar públicamente los avances al mismo tiempo que agradecemos a los colegas que asistieron a estas presentaciones y nos acercaron aportes y comentarios.

- Reunión del CUCEN llevada a cabo en la Universidad Nacional de San Martín, octubre de 2009.
- Encuentro de Profesores de Profesorados de Matemática del Nordeste, organizado por la Universidad Nacional de Misiones, octubre de 2009.
- Escuela de Primavera de Didáctica de la Matemática, organizada por la Universidad Nacional de San Martín, noviembre de 2009.

Agradecimientos a colegas

Agradecemos a los colegas de Institutos Terciarios, Universidades Nacionales y Privadas quienes generosamente y con compromiso ético y profesional, se tomaron el tiempo y esfuerzo en enviarnos sus comentarios que nos han permitido enriquecer el trabajo.

Sumario

Introducción

En el marco del Proyecto de Mejora de la Formación Docente Inicial para el Nivel Secundario en Biología, Física, Matemática y Química, pretendemos en este documento desarrollar unas primeras respuestas a las tres cuestiones presentes en la problemática de la formación del futuro profesor de Matemática:

- ¿Qué es lo que realmente importa que los futuros docentes de Matemática comprendan del campo disciplinar?
- ¿Qué tipo de experiencias debería transitar un futuro profesor durante su formación para que alcance la comprensión deseada?
- ¿Cómo sabemos, tanto los formadores de profesores de Matemática como los estudiantes del profesorado, que están construyendo comprensión?

Para dar posibles respuestas a estas cuestiones, en este documento presentamos:

- Un marco que explicita posiciones desde las cuales se formulan respuestas a las preguntas.
- Un conjunto de núcleos problematizadores que vertebran la comprensión de la Matemática para la formación docente inicial. Para cada núcleo, se explicitan, además:
    - el enunciado de objetivos de aprendizaje que establecen el alcance y profundidad de la comprensión esperada;
    - una propuesta de experiencias de aprendizaje que sería recomendable se proponga a los estudiantes de profesorado para el logro de tales objetivos. Esta propuesta se establece con la intención de mostrar algunos tipos de tareas, sin pretensión de exhaustividad;
    - matrices que explicitan criterios de evaluación y sus descriptores que permitirían identificar mapas de progreso del aprendizaje de los estudiantes.

Son muchas las nuevas preguntas que se nos plantean antes de poder esbozar algún tipo de respuesta a las cuestiones planteadas. En primer lugar, debemos reconocer que la formación del Profesorado es un problema abierto en el seno de los grandes problemas del ámbito de la Didáctica de la Matemática. En este campo se reconocen una variedad de líneas y de enfoques que tratan de describir y explicar los fenómenos de enseñanza y aprendizaje para luego actuar sobre el sistema de enseñanza, con una diversidad de herramientas teóricas. Por esta razón, cualquier intento de respuesta a esta compleja cuestión resultará forzosamente parcial y limitada. Esta difícil realidad se profundiza si además admitimos que la formación del Profesor de Matemática está íntimamente relacionada con qué Matemática hay que dar en la escuela secundaria de hoy y debería ser flexible para adaptarse a cambios futuros que se den en este nivel. Por ende reconocemos la importancia de restringir el análisis de este complejo problema a necesarias y determinadas miradas, descripciones y análisis científicos, pero indiscutiblemente insuficientes. A continuación tratamos de presentar los acuerdos logrados que sintetizan nuestra posición.

Entendemos que para poder dar respuesta a qué es lo que realmente importa que los futuros docentes en Matemática comprendan del campo disciplinar, previamente debemos responder qué significa comprender Matemática. Esta última pregunta está íntimamente ligada a cómo se concibe el conocimiento matemático en el amplio espectro que incluye desde la Matemática científica hasta la Matemática enseñada en los distintos niveles. Por lo tanto, nos resulta indispensable tener en cuenta: ¿cómo concibe la comunidad matemática los objetos que produce?, ¿cómo conciben los profesores en ejercicio los textos, el currículo y los objetos que enseñan?, y ¿cómo concibe la comunidad didáctica los objetos matemáticos que deben ser enseñados en un tiempo y una circunstancia dada?

Hay en la actualidad algunos acuerdos que ofrecen posibles respuestas a estos cuestionamientos y que nos permiten establecer un punto de partida sobre el que basamos la propuesta de este documento.

Acuerdos epistemológicos (respecto de la Matemática)

- La Matemática es una construcción cultural y social.
- La Matemática, en tanto actividad humana, implica el planteo y la búsqueda de soluciones de situaciones problemáticas. Es en la búsqueda de esas soluciones o en los planteamientos de nuevas problemáticas donde se construyen y evolucionan los objetos matemáticos. La actividad matemática incluye desde las exploraciones y aproximaciones realizadas en el proceso de búsqueda de soluciones hasta la formalización y presentación de resultados como producto acabado. En ese marco, se reconoce como una de las actividades relevantes a la modelización. Ésta incluye tanto el análisis, la adaptación y uso de modelos matemáticos conocidos, como la creación de conocimientos matemáticos para simplificar, describir y manipular los sistemas en estudio.
- El lenguaje simbólico en el que se expresan los problemas y las soluciones encontradas tiene una función tanto representacional como comunicativa e instrumental.
- La Matemática, en tanto sistema conceptual, está lógicamente organizada y fundamentada mediante procesos deductivos.

Acuerdos cognitivos (respecto del aprendizaje de la Matemática)

Comprender un objeto matemático significa haber transitado por diversas experiencias que le permitan al estudiante producir, organizar y re-organizar la red de relaciones que se deben establecer en la resolución de una situación problemática[1] que "obliga" al funcionamiento del objeto, los procedimientos o técnicas que se despliegan para resolverla, las definiciones, propiedades, argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por el lenguaje simbólico, propio de la Matemática, y la lengua natural.

Estos acuerdos se complementan con otra posición que compartimos que se refiere al papel relevante que tienen las prácticas (el trabajo en el aula) en la construcción del perfil del docente. Cualquier proceso de formación, en particular el de un profesor de Matemática, toma sentido a partir de un conjunto de situaciones/tareas/problemas/cuestiones a las que es necesario que los estudiantes puedan dar respuesta. Pero ¿cuáles son estas situaciones/problemas/cuestiones?... Antes de intentar responder a esta pregunta, queremos destacar que el hecho de que los estudiantes sean futuros profesores de Matemática agrega un componente importante a considerar en este documento: los futuros profesores deben transitar en sus espacios de formación por prácticas y experiencias de producción matemáticas que, por un lado, creen las condiciones de emergencia de los objetos matemáticos a partir de las relaciones matemáticas puestas en juego y, por otro lado, generen buenas condiciones para la reflexión en torno a los modos de hacer, la relación con otros objetos, los argumentos posibles y no necesariamente solidarios con los convencionales. Es decir: un espacio en donde los docentes puedan construir una relación con la Matemática que les proporcione herramientas para cuestionar la naturalidad de los objetos de la matemática escolar, y perseguir respuestas a estos cuestionamientos.

Entonces, para atender a esta cuestión, podemos pensar en las decisiones que el futuro docente deberá tomar sobre la Matemática a enseñar cuando esté en ejercicio. A modo de ejemplo, el docente debería disponer de herramientas que le permitan dar respuestas a cierto tipo de preguntas sobre objetos matemáticos a enseñar:

- ¿Por qué son necesarios y se deben enseñar?
- ¿Qué tipo de problemas resuelven?
- ¿Con cuáles otros conceptos, operaciones, propiedades, definiciones, se lo asocian?
- ¿Qué tipo de argumentaciones se utilizan a propósito de los mismos?
- ¿Qué lenguaje representa y operativiza sus principales funciones y usos?
- ¿Qué contextos dejan al descubierto el o los significados que se pretenden generar?
- ¿Qué contextos ayudan a comprender diferencias y similitudes entre los objetos y otros vinculados a ellos?
- ¿Cuáles situaciones provocan cambios y evolución de significados de los objetos?
- ¿En qué contexto histórico y cultural aparecen los conocimientos matemático en cuestión?
- ¿Cómo contribuyen a la construcción y organización del saber matemático?

[1] Las situaciones problemáticas a las que nos referimos en este documento son tanto intra-matemáticas como extra-matemáticas.

Por supuesto esta lista de interrogantes no es exhaustiva, sólo intenta poner en evidencia que los aprendizajes en la formación docente deben orientarse para ayudar al futuro profesor a delinear respuestas superadoras de posiciones clásicas que no cuestionan el saber a enseñar. Compartimos la posición de que las herramientas para tal fin deben desarrollarse durante la enseñanza de la Matemática y de la Didáctica de la Matemática que se promueva en la formación inicial. El posicionamiento que el futuro docente sostenga ante el saber matemático construido en su formación inicial, condicionará la manera en que lo acercará a los estudiantes del nivel secundario y por lo tanto condicionará la forma en que estos últimos se apropien de él.

El marco de acuerdos presentado posibilita imaginar un escenario deseable que permita pensar la enseñanza de la Matemática para futuros docentes en un espacio de construcción, transformación y validación de los conocimientos, tratando de no enfatizar ninguna de todas las dimensiones que posee el saber matemático sobre la otra (por ejemplo: lo discursivo sobre la práctica, lo axiomático sobre lo constructivo, lo deductivo sobre lo plausible).

En este sentido, consideramos como ejes reguladores para desarrollar una actividad matemática en la formación docente -con telón de fondo en el marco de acuerdos expuesto- a los siguientes.

- **El razonamiento plausible o conjetural en la etapa de exploración de los problemas y en el proceso hacia la demostración matemática.**
  La utilización de un razonamiento no-deductivo que permita elaborar, contrastar y transformar el conocimiento matemático y la toma de conciencia mediante la reflexión sobre lo que se dice y lo que se hace, como condición necesaria para comprender y otorgar significados a la construcción de un sistema conceptual organizado.

- **La reorganización deductiva del conocimiento matemático**
  La Matemática, en tanto sistema conceptual, está lógicamente organizada, y son los procesos deductivos los que permiten su estructuración. La lógica y el lenguaje acompañan la reorganización deductiva poniendo al descubierto su potencia como herramienta en la producción individual y en la producción del conocimiento socialmente compartido. La lógica necesariamente acompaña no solo la reorganización deductiva del conocimiento matemático sino está presente en las distintas formas de demostración que se deben aprender y en el razonamiento matemático subyacente a toda actividad matemática.

- **La dualidad exactitud-aproximación del trabajo matemático para observar, interpretar y leer la "realidad".**
  La búsqueda de resultados exactos a problemas matemáticos hace tiempo que se mostró insuficiente. La realidad que se pretende explicar se describe con modelos que, mayoritariamente, se resuelven por métodos numéricos computacionales que ofrecen soluciones aproximadas y cuya precisión, generalmente, se puede controlar. Sin embargo, esta dualidad epistémica no llega a las aulas, en las cuales prevalece la búsqueda de soluciones exactas.

- **La utilidad de los conocimientos matemáticos y la contextualización de sus construcciones.**
  Muchos conceptos matemáticos se han gestado respondiendo a necesidades surgidas en contextos de resolver problemáticas extra-matemáticas. Otros, en cambio, han nacido de intereses propios de la Matemática, con intención de lograr avances en ella tanto sea por obtener resultados más generales como conceptos más inclusores respecto de otros. De este modo la presencia de problemas es un aspecto característico de la Matemática y su potencia en el avance de la ciencia fundamenta la decisión de considerarlos al interior de las aulas del Profesorado. Pensamos que los futuros docentes deberían ser capaces de abordar problemas de distinta índole: con o sin solución, abiertos o no, de aplicación, de motivación, que dieron origen a conceptos, otros que mediante su desarrollo permiten construir nociones nuevas para ellos, etcétera De este modo, se reconocería la utilidad de la Matemática y se comprendería que sus construcciones están contextualizadas en el tiempo y en las problemáticas que les dan lugar.

En todas las respuestas que presentamos intentamos poner de manifiesto la adecuación de las mismas en dos sentidos:

- porque permiten una comprensión apropiada del objeto matemático -en términos de lo epistemológico y cognitivo ya descripto; y
- porque toman en consideración que quien aprende es un futuro profesor de Matemática y esto exige trabajar con los objetos matemáticos de otro modo, como acabamos de manifestar. Es necesario tener presente que el modo de aprender los objetos matemáticos se dará en consonancia con las experiencias de aprendizaje vividas en la formación.

Por último, enfatizamos que el contenido de este documento -focalizado en la formación disciplinar- compromete la formación didáctica, siendo concientes de que lo didáctico exige un trabajo de construcción que excede a los aportes que desde lo disciplinar pueda abordarse. En realidad, nuestra intención es contribuir

Presentación general de los núcleos problematizadores

En esta sección presentamos los núcleos problematizadores evidenciando relaciones entre ellos, e incluimos algunos objetivos de aprendizaje de los estudiantes durante su formación.

Los núcleos

Para avanzar en las razones que nos llevaron a definir cada núcleo problematizador reflexionamos sobre el conjunto de cuestionamientos específicos que dan sentido al quehacer matemático en el amplio contexto que involucra los aspectos relacionales de su naturaleza.

Bajo esta perspectiva, una mirada retrospectiva permite posicionar los orígenes de los saberes específicos de cada núcleo en el devenir histórico del trabajo matemático. Así encontramos:

- la complejidad proveniente de la cantidad (dando origen al número, a la aritmética)[2];
- la complejidad que procede del espacio (dando lugar a la Geometría).

Más adelante, el mismo espíritu matemático se enfrenta con:

- la complejidad del símbolo (lo algebraico);
- la complejidad del cambio y del movimiento (lo analítico)[3];
- la complejidad proveniente de la incertidumbre (las probabilidades y la estadística);
- la complejidad de la estructura formal del pensamiento (lógica matemática).

Cada una de estas complejidades es abordada en el presente documento a partir de un núcleo específico excepto la última, que si bien no cuenta con un núcleo propio, está presente en cada uno de los restantes en el abordaje de las relaciones formales que existen entre las proposiciones formuladas durante el estudio de los objetos matemáticos que los constituyen.

De este modo, los núcleos propuestos son:

- **Núcleo 1**: Lo geométrico
- **Núcleo 2:** Lo analítico
- **Núcleo 3:** Lo numérico[4] y lo aritmético
- **Núcleo 4:** Lo algebraico
- **Núcleo 5:** Lo probabilístico y lo estadístico

2 Idea extraída del documento de Miguel De Guzmán, “Enseñanza de las Ciencias y la Matemática” en OEI Para la Educación, la Ciencia y la Cultura- Biblioteca Digital de la OEI- weboei@oei.es

3 Con el nombre “lo analítico” en este núcleo nos referimos a aspectos del Análisis Matemático.

4 Con el nombre de “lo numérico” hacemos referencia a los diferentes conjuntos de números, no considerando en este núcleo los métodos computacionales que resuelven cálculos numéricos.

Cada uno de los núcleos se organiza alrededor de "grandes motores", expresados mediante preguntas, que promueven o han promovido el avance en la comprensión y desarrollo de la actividad matemática y que llamamos sub-núcleos. Para cada núcleo se detallan además, otra serie de preguntas que refinan a las centrales y que permiten mejorar la comprensión del enfoque presentado aquí.

Cada núcleo incluye:

- Una breve fundamentación de la elección de los sub-núcleos.
- Un esquema que contiene las preguntas centrales de cada sub-núcleo (presentadas en los rectángulos centrales), contenidos mínimos para la formación (presentados en óvalos periféricos) y un detalle breve de cómo se propone alcanzar la comprensión al poner de manifiesto la metodología propia de trabajo de esa área, las formas de comunicación apropiadas y la finalidad que se persigue con el trabajo en el núcleo (este detalle se presenta en un cuadro a la izquierda del esquema);
- Objetivos de aprendizaje,
- Un conjunto de experiencias sugeridas para desarrollar durante la formación superior.
- Un ejemplo modelo de una experiencia posible.
- Criterios para reconocer avances en la comprensión de los contenidos. Se presentan en una matriz que contiene lo que se espera en términos de aprendizaje matemático al promediar la formación docente y al finalizar la misma, así como lo que se espera que pueda hacer al iniciarse en el campo profesional incluyendo en este caso, aspectos didácticos (se considera el período desde la residencia, durante la formación, hasta los primeros años de trabajo profesional).

Cabe señalar que cada uno de los esquemas no puede leerse aislado del resto de los elementos incluidos en el núcleo ni deben perderse de vista las fuertes relaciones que vinculan los núcleos entre sí.

Asimismo, a partir de los esquemas no se pretende proponer secuenciación ni jerarquización de contenidos. Todos ellos darían lugar a organizar secuencias bajo distintos criterios. Las flechas que figuran en los esquemas muestran conexiones entre contenidos que deben abordarse para avanzar en respuestas a las preguntas centrales. La presentación de los núcleos y el despliegue en cada uno pone de manifiesto la reflexión sobre la formación matemática de un futuro profesor y no ha sido objetivo de este documento la discusión sobre el diseño de espacios curriculares. Simplemente mencionamos que lo propuesto para un núcleo no necesariamente debería resultar acabado en espacios curriculares específicos de esta temática. De hecho mencionaremos explícitamente vínculos entre los núcleos que contemplen un tratamiento matemático integrado que consideramos necesario durante la formación.

Consideramos que un estudiante, al finalizar su formación en el profesorado, debería haber desarrollado herramientas que le permitieran abordar con flexibilidad y autonomía las preguntas centrales de todos los núcleos.

Por último, deseamos volver a insistir sobre el carácter abierto e institucional de esta problemática que nos alerta sobre cómo tratar y valorar este fenómeno en su necesaria relación con la evolución del sistema de enseñanza. Este primer intento de delimitación de los conocimientos matemáticos y su modo de apropiación en la formación de un futuro profesor, deberá ser transitado con mucha cautela siendo capaces de reconocer no sólo la complejidad sistémica sobre cómo se comprende un objeto sino además ser concientes que ese acto de apropiación es dinámico, progresivo, no-lineal y que se encuentra en plena instancia de investigación en el ámbito de la Didáctica de la Matemática y de las ciencias preocupadas por el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Esquema general de los núcleos y vinculaciones entre ellos

El esquema siguiente pone de manifiesto las preguntas centrales alrededor de las cuales puede desarrollarse el trabajo matemático y evidencia algunos de los vínculos entre los núcleos en el rectángulo de la izquierda. Resaltamos la importancia de lograr enfoques unificados de tratamiento matemático.

LO NUMÉRICO Y LO ARITMÉTICO

¿Qué propiedades de los números se conservan y/o se modifican al cambiar de conjunto numérico? ¿Y las propiedades de las operaciones? ¿Cómo se vincula la relación de divisibilidad en Z con la resolución de ecuaciones? ¿Cuál es el alcance de la relación de divisibilidad? ¿Qué significa "a dividido b" en cada conjunto numérico? ¿Cómo se cuentan los elementos de una colección? ¿Qué camino permite ir de lo finito a lo infinito? ¿Cómo se construyen propiedades generales de los números y de ciertas operaciones? ¿Cómo hacer más accesibles estos objetos a través de un método más general?

LO GEOMÉTRICO

¿Qué figuras y lugares geométricos son construibles a partir de distintos instrumentos?
¿Qué propiedades y/o elementos son invariantes bajo ciertas condiciones?
¿Qué invariancias o regularidades caracterizan los diferentes objetos?
¿Qué diferentes conocimientos geométricos (nociones, propiedades, representaciones) sobre los objetos proporciona el método analítico y el sintético?

LO ALGEBRAICO

¿Qué significa resolver la ecuación $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = 0$? o un sistema de ecuaciones de ese tipo para coeficientes en determinados conjuntos? ¿Qué propiedades e interpretación geométrica tiene el conjunto solución?
¿Cómo optimizar funciones sujetas a restricciones dadas por inecuaciones lineales?
¿Qué significa resolver $P(x) = 0$, siendo P un polinomio?
¿Cómo se relaciona la factorización de un polinomio con la resolución de ecuaciones polinómicas?
¿Cómo reconocer cónicas o cuádricas dadas por ecuaciones polinómicas?
¿Qué propiedades tienen las operaciones definidas en un conjunto?
¿Qué caracterizaciones de los conjuntos son posibles a partir de las propiedades de sus operaciones?
¿Qué transformaciones entre conjuntos en los que se han definido una o más operaciones, conservan la estructura?

Razonamiento plausible - exactitud-aproximación - reorganización deductiva - utilidad y contextualización del conocimiento

LO PROBABILISTICO Y LO ESTADISTICO

¿Cuáles son las diferencias entre un experimento aleatorio y un experimento determinístico?
¿Cómo se cuantifica la posibilidad de que ocurra un evento aleatorio?
¿Cómo se modelizan situaciones dónde interviene la aleatoriedad?
¿Cómo se describe estadísticamente un conjunto de datos?
¿Cómo obtener información sobre las características de una población basándose en una muestra?
¿Existe relación causal o asociación entre las variables en estudio?
¿Cuál es la variable que mejor explica a otra?
¿Cómo se puede predecir el valor de una variable bajo condiciones de incertidumbre?

LO ANALÍTICO

¿Cómo aproximar funciones?
¿Cómo obtener la mejor aproximación lineal de una función?
¿Cómo expresar analíticamente razones de cambio?
¿Cómo optimizar procesos?
¿Cómo estimar áreas y volúmenes? ¿De qué modo describir matemáticamente la variación de los procesos que modelizan el mundo físico y material? ¿Cómo obtener información de procesos variacionales que permita describirlos, estimar magnitudes, optimizar procesos y predecir comportamientos? ¿Cómo precisar la noción de tendencia? ¿Qué caracteriza al conjunto de números reales y lo distingue del conjunto de los números racionales? ¿Qué precisiones matemáticas se requieren para formalizar las ideas intuitivas del Análisis?

ALGUNOS VINCULOS ENTRE NUCLEOS

Interpretación y estudio de la aplicación de algunas isometrías a algunos lugares geométricos en función de las expresiones analíticas resultantes (Geometría-Álgebra).
Estudio de las estructuras algebraicas definidas por algunas isometrías con la operación composición (Geometría-Álgebra).
Determinación de medidas de magnitudes (longitud, área y volumen) mediante métodos específicos del campo analítico (integral curvilínea, integral de Riemann, integral de Lebesgue) (Geometría-Análisis).
Caracterización del conjunto de los números construibles, estudio de los conjuntos numéricos incluidos en este conjunto y explicitación de un número construible a partir del álgebra de los polinomios. (Geometría-Aritmética/Números).
Cálculo de probabilidades - conteo (Probabilidad/Estadística-Aritmética /Números).
Conteo - binomio de Newton y el triángulo de Pascal o Tartaglia (Probabilidad/Estadística-Aritmética/Números-Álgebra).
Cálculo de probabilidades geométricas y cálculo de áreas de figuras geométricas (Geometría-Álgebra-Análisis-Probabilidad/Estadística).
La construcción de la tabla de la normal - desarrollos en serie de potencias y teorema fundamental del Cálculo (Probabilidad/Estadística-Análisis).
La estimación del valor de integrales definidas - una aplicación de la ley de los grandes números usando el método de Monte Carlo (Probabilidad/Estadística-Análisis).
El método de estimación de máxima verosimilitud y mínimos cuadrados (Probabilidad/Estadística-Análisis).
La determinación de la función de distribución acumulada y el cálculo de momentos de variables aleatorias - con el cálculo de integrales y series (Probabilidad/Estadística-Análisis).
Interpretación geométrica de los sistemas de ecuaciones y del conjunto solución (Geometría-Álgebra-Análisis).
Las matrices de ciertas transformaciones lineales y las transformaciones geométricas (Geometría-Álgebra).
Las expresiones polinómicas de segundo grado y las cónicas (Geometría-Álgebra).
Uso de matrices para obtener las expresiones canónicas de cónicas y cuádricas (Geometría-Álgebra).
Posibilidad o no de realizar construcciones con regla y compás (Geometría-Álgebra).
Concepto de función (Análisis-Álgebra).
Resolución de ecuaciones para la determinación de elementos de las funciones como ceros, extremos, preimágenes, etcétera.(Análisis-Álgebra).
Soluciones aproximadas de una ecuación (Análisis - Álgebra).
Los polinomios y las funciones polinómicas (Análisis - Álgebra).
Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales (Análisis-Álgebra).
Las estructuras algebraicas y los conjuntos numéricos y las operaciones definidas en ellos (Álgebra-Aritmética/Números).
Las relaciones de equivalencia y la congruencia (Álgebra-Aritmética/Números).
El uso de la teoría de la medida para fundamentar la Probabilidad y la Estadística (Análisis-Probabilidad/Estadística).
La anulación del producto interno en un espacio euclídeo y la perpendicularidad (Álgebra-Geometría).
Los movimientos en el plano, las relaciones de equivalencia y la estructura de grupo (Álgebra-Geometría).
La estructura de espacio vectorial y la sistematización de las propiedades geométricas (Álgebra-Geometría).
El área de un paralelogramo, el volumen de un paralelepípedo y la función determinante (Álgebra-Geometría).

Matemática

Núcleo 1: Lo geométrico

Presentación del núcleo

En este apartado pretendemos avanzar en el reconocimiento de algunos eslabones que consideramos centrales para abordar la enseñanza de la Geometría para un futuro profesor de Matemática. Estas consideraciones nos permitirán, por un lado, reflexionar acerca de la complejidad particular que tiene la enseñanza de la Geometría respecto de los otros dominios de la Matemática presentados en los diferentes núcleos de este documento. Por otro lado, dichas reflexiones nos proporcionan ciertos elementos de fundamentación de las decisiones que han dado lugar a la constitución de este núcleo: *lo geométrico*.

Cabe señalar, antes de adentrarnos en las especificidades de los saberes geométricos, que el prestigio adquirido históricamente en la disciplina se ha ido desplazando hacia otras ramas que proporcionan nuevos registros de representación y que habilitan un trabajo que puede descontextualizarse de las figuras, una vez modelizadas las relaciones geométricas utilizando ese nuevo sistema. Actualmente, la formación matemática hereda los resabios de este corrimiento, la Geometría sintética -sin sistemas de referencias ni coordenadas- ha perdido lugar en las aulas desplazándose hacia formas más algebraicas.

Centrados ya en las cualidades de "lo geométrico", existe una compleja relación entre los objetos que son experiencialmente reales -vinculados a la percepción y sensibles a nuestros sentidos– y los objetos teóricos de la Geometría en tanto objetos que responden a las leyes de la disciplina. En tal sentido, la tensión entre representación y objeto teórico presente en todos los objetos de la Matemática adquiere aquí una singularidad: las representaciones de los objetos teóricos conllevan, a su vez, otra representación figural posible en el espacio físico o sensible (como pueden ser un dibujo a mano alzada, una construcción con regla y compás o con software).

La pregunta es entonces, cómo generar condiciones desde la enseñanza que le permitan al estudiante avanzar desde un posicionamiento más empírico, basado en la percepción y manipulación de objetos, a un posicionamiento basado en las relaciones matemáticas que los constituyen. En esta línea, las actividades de construcción resultan un motor que abona al establecimiento de conjeturas, a la anticipación y a la puesta en evidencia de ciertas restricciones que imponen a los objetos las propias relaciones que los caracterizan, al mismo tiempo que permiten recuperar y avanzar a partir de los conocimientos elaborados en la escuela media.

En consonancia con lo mencionado, distintos autores distinguen *figura* de *dibujo*. Para Parzysz (1988) "la figura es el objeto geométrico descripto por el texto que la define, una idea, una creación del espíritu, en tanto que el dibujo es una representación de este objeto". Las actividades de construcción permiten un uso alternado entre figura y dibujo. De alguna manera, el uso de los dibujos en tanto figuras de análisis[5] en el marco de una actividad de construcción, permite utilizarlos trascendiendo lo puramente perceptivo para capturar en ellos las relaciones que deberán estar presentes en la figura que se quiere construir. Asimismo, la actividad de construir persigue la constitución física de los objetos – y en tal sentido una representación del mismo - pero avanza en la discusión respecto de su existencia teórica, en la medida en que las relaciones movilizadas para su construcción caracterizan al objeto teórico al que dan lugar.

En estrecha relación con la cuestión de la existencia o no existencia para la Matemática, la validez o invalidez de una proposición, de una resolución o de una respuesta adaptada a una problemática, requiere adentrarse en las formas de validación que son aceptadas en la Geometría. Es aquí, que la aproximación a las figuras trascendiendo lo puramente perceptivo, genera condiciones para que los estudiantes dispongan de relaciones y propiedades de las figuras como recurso argumentativo y pone en consideración otros recursos diferentes a lo que se ve o se mide en el dibujo.

En esta línea, el análisis de las propiedades y elementos que se mantienen inva-

5 "Esquema que cumple la función de hacer observables las relaciones necesarias para resolver un problema [...]", citado en Documento de trabajo Nº 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo, 1998.

Matemática

riantes bajo ciertas condiciones[6], otro aspecto característico del hacer matemático, adquiere en la Geometría un carácter especial. El análisis de las invariancias da lugar a un proceso de generalización y estructuración que fundamenta la cons-trucción de ciertas clases de objetos, basados en las características invariantes que comparten. Lo mencionado puede darse en distintos niveles, uno más vinculado a la estructuración de la disciplina, como ser las diferentes Geometrías que surgen al pensar las propiedades invariantes bajo transformaciones[7]. Y, un segundo nivel, más vinculado a la estructuración de los objetos, como por ejemplo la caracterización de cada isometría a partir de los puntos y conjuntos del plano que deja invariantes o la de los ángulos inscriptos en una circunferencia a partir de su relación con un mismo ángulo central.

Por otra parte, la dependencia a la representación gráfica de las figuras, -propia de la Geometría sintética- se ve liberada con la introducción de la Geometría analítica. La introducción de la modelización algebraica en la Geometría proporciona, del mismo modo que lo hace respecto del trabajo aritmético, posibilidades de descontextualización de las representaciones gráficas de las figuras. Así, los sistemas algebraicos permiten capturar las relaciones geométricas, aislarse de los significados durante el tratamiento algebraico y volver a contextualizarse una vez obtenidas las soluciones buscadas a ciertas problemáticas. En este sentido, la Geometría analítica proporciona otros niveles de generalización para el estudio de las cuestiones vinculadas a las propiedades de las figuras al permitir capturar propiedades generales de familias enteras de curvas que no podrían estudiarse por medio de los métodos sintéticos.

Lo que venimos mencionando, y su vínculo con un modo de pensar geométrico da sentido a la consideración de tres sub-núcleos al interior del núcleo geométrico. Sub-núcleos que es importante considerar como enfoques que permitan recorrer en distintos momentos, diferentes costados de los objetos, y adquirir sucesivas aproximaciones que se irán integrando en la constitución de los mismos.

6 Una invariancia siempre está ligada a alguna condición que tiene que ver con las relaciones geométricas planteadas sobre los objetos y las propiedades puestas en juego. Por ejemplo: la razón cruzada es una propiedad invariante respecto de una transformación proyectiva, una recta permanece invariante bajo una simetría axial respecto de cualquier recta perpendicular a ella.

7 Por ejemplo la geometría afín como la que conserva las propiedades de la geometría proyectiva y agrega la conservación del paralelismo.

Hemos considerado, en este sentido, los siguientes sub-núcleos:

- lo construible,
- lo invariante y
- lo analítico-lo sintético.

En tanto enfoques, estos sub-núcleos "iluminan" desde diferentes lugares, en muchos casos, dependientes de distintas técnicas y formas de representación. Es por ello que alrededor de estos sub-núcleos se articulan "grandes temas" que serán visitados una y otra vez con distintos focos o lentes. Enfatizamos que estos temas se articulan y adquieren particularidades en, los diferentes sub-núcleos, en la medida en que estos últimos proporcionan modos distintos de ver.

Agregamos que cada sub-núcleo se soporta, a su vez, en un conjunto de preguntas, problemáticas y cuestiones sobre los objetos de acuerdo a los diversos costados que ilumina.

Señalamos aquí, a modo de ejemplo, sólo algunas preguntas que regulan los sub-núcleos:

- ¿Qué propiedades y/o elementos son invariantes bajo ciertas condiciones? ¿Qué invariancias o regularidades caracterizan los diferentes objetos? ¿Qué espacios geométricos se definen a partir de dichas invariancias?
- ¿Cómo se relacionan los instrumentos con ciertas propiedades que se mantienen invariantes en una figura?
- ¿Qué restricciones teóricas imponen los instrumentos? ¿Qué figuras y lugares geométricos son construibles con ciertos instrumentos? ¿Qué Geometrías se elaboran a partir de estas restricciones?
- ¿Qué diferentes conocimientos geométricos (nociones, propiedades, representaciones) sobre los objetos proporciona el método analítico respecto del método sintético?
- ¿Qué problemas de la Geometría necesitan de un abordaje analítico para responderse?

Objetivos específicos de aprendizaje

En consonancia con los interrogantes anteriores, formulamos los objetivos de aprendizaje para este núcleo.

- Elaborar criterios que permitan llevar adelante un estudio matemático de los conocimientos vinculados a los procesos de construcción de figuras y lugares geométricos.
- Reflexionar sobre las potencialidades de las tareas de construcción para abordar el estudio de las relaciones matemáticas presentes en los objetos geométricos.
- Reconocer las vinculaciones entre las distintas Geometrías a partir del conocimiento de las propiedades que se mantienen invariantes respecto de las diferentes transformaciones.
- Identificar los diferentes conocimientos que proporcionan los métodos sintético y analítico en el estudio de los objetos geométricos.
- Analizar las potencialidades y limitaciones de los métodos sintético y analítico en la resolución de un problema.
- Elaborar y utilizar modelos involucrando conocimientos geométricos que resulten adecuados para interpretar sistemas matemáticos y no matemáticos.
- Elaborar criterios que le permitan diferenciar aspectos propios de la Geometría, respecto de otros dominios de la Matemática, como ser los modos de validación en Geometría, los diferentes registros de representación, los métodos o procedimientos aceptados.

En la siguiente página presentamos el esquema recordando la importancia de leerlo vinculado al resto de los elementos incluidos en el núcleo y considerando las fuertes relaciones que vinculan los núcleos entre sí.

Como mencionamos en la introducción, la columna de la izquierda pretende capturar algunos aspectos del quehacer geométrico que constituyen las prácticas propias de este campo.

En la primera parte se incluyen cuestiones referidas al trabajo matemático en el aula del profesorado en el contexto de la resolución de problemas geométricos. Estos modos de hacer no están ni lineal ni temporalmente organizados sino que el hacer en el proceso de resolución de una tarea específica conlleva un ida y vuelta entre ellos.

Se menciona la particularidad de la doble función del lenguaje, como herramienta en la producción individual y en la producción del conocimiento socialmente compartido. Interesa destacar aquí la potencialidad del lenguaje como generador de nuevas relaciones matemáticas en el marco del trabajo individual y colectivo. El aspecto social del lenguaje incluye los acuerdos involucrados en la comunicación que atañen a las distintas representaciones utilizadas, a los modos propios de argumentación y a los acuerdos convenidos en el seno de la comunidad de clase y su referencia en la comunidad matemática.

Otro aspecto que interesa destacar refiere a la dualidad que se constituye a partir de la tensión entre representación y objeto teórico que ha sido mencionada en los primeros párrafos de la presentación del núcleo.

Asimismo, la conveniencia del uso del método analítico o sintético necesita de un análisis en el aula sobre las producciones de los estudiantes en las que se hayan desplegado uno y otro método, destacando las relaciones matemáticas diferenciadas que cada uno promueve.

Con referencia a los recursos tecnológicos mencionados se señala la particularidad de los diferentes instrumentos geométricos en las prácticas específicas de la Geometría. Como se podrá advertir en los criterios incluidos en la tabla de la sección Criterios para reconocer avances en la comprensión de los contenidos, el instrumento no tiene sólo un fin práctico de construcción de los distintos objetos geométricos, sino que enfatiza también diferentes relaciones y da lugar a distintas Geometrías a partir de la restricción a algunos de ellos.

Exploración y elaboración de conjeturas sobre los objetos geométricos.

Análisis del dominio de validez de las conjeturas.

Uso flexible del lenguaje (coloquial, gráfico, algebraico) y su doble función.

Validación de los argumentos.

Reflexión sobre los objetos geométricos mediante el uso de figuras de análisis.

Uso de instrumentos. Reflexión sobre el papel de éstos en el hacer geométrico.

Discusión sobre la dualidad construcción física – construcción teórica.

Uso flexible de los métodos analítico y sintético analizando la conveniencia de cada uno en la resolución de problemas geométricos.

Utilidad en la resolución de problemas a partir de la modelización de situaciones internas y externas a la matemática. Su aporte particular para la modelización del mundo sensible.

Recursos tecnológicos: lápiz y papel, instrumentos clásicos de Geometría (compás, regla, escuadra, transportador), instrumentos mecánicos, softwares, entre otros.

Software de Geometría dinámica y software que conecta interactivamente representaciones algebraicas, geométricas y numéricas.

Transformaciones

Análisis de propiedades que se mantienen invariantes bajo transformaciones proyectivas, afines, isometrías, semejanzas e inversión. Estudio de conceptos relacionados con la invariancia (por ejemplo razón cruzada en el espacio proyectivo y longitud en el espacio euclídeo).
Caracterización de transformaciones semejantes e isométricas a partir de la relación entre un elemento y su transformado.
Estudio de las transformaciones isométricas desde lo sintético y lo analítico.?

Vincula con los núcleos "Lo numérico y lo aritmético" y "Lo algebraico"

Lo euclídeo

Las propiedades invariantes del espacio euclídeo con relación al V postulado. La vinculación del V postulado con la construcción de las Geometrías no euclídeas. Estudio de problemas de la geometría euclídea desde los métodos sintético y analítico.
La importancia del sistema axiomático euclídeo para la organización y comunicación de los conocimientos geométricos.

Vincula con los núcleos "Lo analítico" y "Lo algebraico"

LO INVARIANTE

¿Qué propiedades y/o elementos son invariantes bajo ciertas condiciones?
¿Qué invariancias o regularidades caracterizan los diferentes objetos?

LO CONSTRUIBLE

¿Qué figuras y lugares geométricos son construibles a partir de distintos instrumentos?

LO ANALÍTICO-LO SINTÉTICO

¿Qué diferentes conocimientos geométricos (nociones, propiedades, representaciones) sobre los objetos proporciona uno y otro método?

Vincula con los núcleos "Lo numérico y lo aritmético" y "Lo algebraico"

Vincula con los núcleos "Lo analítico", "Lo algebraico" y "lo probabilística y lo estadístico"

Instrumentos

El uso de los distintos instrumentos para construir figuras planas y tridimensionales y lugares geométricos. Relación de los distintos instrumentos con las propiedades que se mantienen invariantes en la construcción.
Estudio de las restricciones teóricas que imponen los distintos instrumentos y de las Geometrías que se elaboran a partir de estas restricciones
Estudio de problemas de construcción de la Geometría sintética que permiten responderse a partir de los aportes de la Geometría analítica.

Figuras y lugares geométricos

Estudio de las propiedades geométricas que se mantienen invariantes en las figuras planas y tridimensionales a partir de la aplicación de semejanzas e isometrías.
Estudio de la posibilidad de construcción de figuras y lugares geométricos con distintos instrumentos.
Discusión sobre el perímetro, área y volumen de figuras y lugares geométricos.
Estudio de las curvas clásicas (cónicas, cicloide, lemniscata, espirales, …) y de las cuádricas. Estudio y caracterización de algunos fractales.
Aproximación a las figuras y lugares geométricos desde los puntos de vista sintético y analítico. Propiedades y construcción de las figuras y lugares geométricos, vinculación entre ellas.

Experiencias sugeridas para desarrollar durante la formación superior

Convencidos de que el tipo de experiencias por las cuales transita un futuro profesor en su formación es determinante para la disponibilidad de herramientas específicas que hacen a su desempeño profesional, describimos algunas prácticas matemáticas que los estudiantes deberían transitar a lo largo de su formación y que consideramos de vital importancia para este núcleo.

- Los estudiantes exploran los problemas de construcción recurriendo a diferentes instrumentos (elementos de Geometría, software de Geometría dinámica) o a mano alzada. Conjeturan propiedades y validan sus conjeturas desplegando diferentes relaciones geométricas.
- Los estudiantes abordan situaciones problemáticas elaborando figuras de análisis como herramienta para visualizar las relaciones que sería necesario poner en juego para desarrollar una construcción.
- Los estudiantes abordan problemas geométricos con herramientas proporcionadas por los métodos sintéticos y analíticos, discutiendo en colectivo la pertinencia y limitaciones de cada uno en cada problema particular.
- Los estudiantes estudian la historia analizando los problemas que se constituyeron en motores de avance del conocimiento geométrico (por ejemplo, la discusión en torno al quinto postulado, la imposibilidad de construcción con regla y compás de los problemas clásicos, la organización de las geometrías en términos de grupos de transformaciones cuyos invariantes se buscan) y las nuevas herramientas matemáticas (objetos matemáticos y sistemas de representación) que posibilitaron esos avances.
- Los estudiantes realizan lecturas críticas de textos de Geometría de nivel superior comparando el lenguaje utilizado, las propiedades consideradas como punto de partida, el uso de figuras de análisis, la equivalencia de definiciones, entre otros.
- Los estudiantes utilizan software de Geometría que movilizan representaciones propias de los métodos sintéticos y analíticos, realizando distintos abordajes de los objetos geométricos en contextos de resolución de problemas.
- Los estudiantes abordan situaciones problemáticas recurriendo a distintos instrumentos, conjeturando las propiedades que se mantienen invariantes y validando sus conjeturas en función de sus conocimientos disponibles.

Un ejemplo de consigna para trabajar en alguna experiencia del tipo de las descriptas

El ejemplo que se presenta a continuación puede ser abordado de distintos modos dependiendo del proyecto de formación institucional del futuro profesor, siguiendo el orden presentado o alterándolo y en una misma asignatura o en distintos espacios curriculares.

1. Dados dos puntos fijos A y B en un plano, ubicar los puntos C de dicho plano de manera que el triángulo ABC sea isósceles[8].

Primer momento (trabajo individual): Momento de exploración y elaboración de conjeturas

- Es probable que los estudiantes reconozcan la mediatriz del segmento AB como el conjunto de puntos que forman un triángulo isósceles con AB. Diferentes relaciones pueden haber desplegado para dar dicha respuesta: reconocer la mediatriz de AB como conjunto de puntos que equidistan de A y B, reconocer que la altura -respecto del lado en principio desigual[9] -es mediatriz de dicho lado desigual, explorar con distintos instrumentos (regla, compás o software) e ir hallando puntos para conjeturar que queda una recta, salvo el punto medio del segmento AB.
- Las distintas relaciones que hayan motorizado durante esta fase de exploración individual los ubica en un lugar diferente para encarar la fase de trabajo en grupo. Por ejemplo, aquel que exploró punto a punto con la regla reconociendo que quedan alineados es probable que, en esta

8 Inspirado en Colacelli, S., García, P., García, A.M. y Zorzoli, G. (1997). Propuesta didáctica: ¿dónde está el punto perdido? Lápiz y papel. EGB 3° Ciclo. Lugares geométricos Matemática, 2, 2-21.

9 Observar que el caso triángulo equilátero queda contemplado tanto al considerar la mediatriz de AB como al considerar cada una de las circunferencias de centro A o B y radio AB. Dejaremos a este caso aparte y nos referiremos a triángulos con un lado desigual sólo a los efectos de lograr mayor claridad en esta descripción.

exploración, extraiga el punto medio de AB; pero aquel que utilizó la mediatriz porque sus puntos equidistan de A y de B es probable que la trace sin percatarse de que debe extraer el punto de intersección entre la mediatriz y el segmento AB.

- Es probable que los estudiantes consideren AB como el segmento desigual, pero dado que la consigna no especifica dicha cuestión, estarían dejando afuera los puntos del plano que corresponden a las circunferencias de radio AB y centro B o A, puntos que determinan los triángulos ABC con lados iguales BC y AB o AC y AB. Pero, al igual que con la mediatriz, además de A y B deben extraer de estas circunferencias los puntos U y V (ver figura 1) que resultan de la intersección de la recta que pasa por A y B con cada una de las circunferencias.
- Si dispusieran de la propiedad de que los ángulos que se oponen a lados congruentes deben ser congruentes podrían tratar de "construirse" ángulos simétricos como muestra la figura 2, será el eje de simetría el que contenga a los puntos C. Utilizar esta propiedad como privilegiada para desplegar triángulos isósceles se vuelve menos pertinente para el caso de que los lados congruentes ya no sean AC y BC.

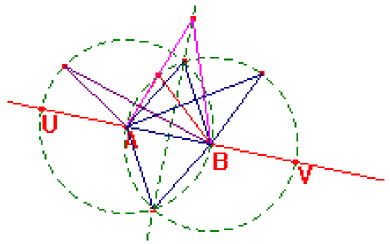

Figura 1

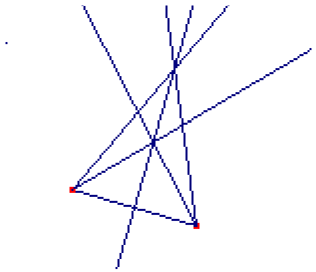

Figura 2

Segundo momento: Intercambio en pequeños grupos con la consigna de acordar una respuesta al problema para ser presentada y defendida al resto de la clase.

Es probable que durante la discusión entre pares se amplíe el número de soluciones (pudiéndose o no obtener el conjunto solución del problema), se analicen aquellas soluciones incorrectas (por ejemplo la consideración del punto medio de AB como posible punto C), se comparen las estrategias de resolución, se fundamenten las distintas soluciones halladas a partir de los conocimientos puestos en juego (por ejemplo, la circunferencia como el conjunto de puntos del plano que equidistan de uno fijo, la mediatriz como el conjunto de los puntos del plano que equidistan de dos puntos dados, distintas propiedades de triángulos isósceles).

Tercer momento: Intercambio con el grupo clase

En este momento se ponen en consideración las respuestas y construcciones de los distintos grupos. Dependiendo de los conocimientos disponibles en el momento en que la actividad entra al aula (decisión que compete al docente) habilita diferentes escenarios, como ser:

- La discusión en torno a la exhaustividad. El uso del artículo 'los' en la consigna involucrando el "todos".
- La equivalencia de definiciones, como por ejemplo, la consideración de la mediatriz como: el conjunto de puntos del plano que equidistan de dos puntos dados, el conjunto de puntos definido por el vértice opuesto al lado desigual (AB) de los distintos triángulos isósceles que comparten el lado AB, la recta perpendicular al segmento AB por su punto medio (movilizada a partir de la búsqueda de alturas posibles para el triángulo ABC), entre otras.
- La definición del conjunto de puntos que satisfacen una determinada propiedad como lugar geométrico.
- La discusión en torno a la validación de los resultados con relación a qué cuestiones son suficientes para fundamentar una construcción en Geometría y la reflexión acerca de las relaciones matemáticas puestas en juego en las distintas argumentaciones que tuvieron lugar en el aula.
- La discusión en torno a la relación entre la construcción física de cada triángulo isósceles y la construcción teórica que moviliza las distintas relaciones de los objetos implicados (circunferencia y mediatriz).

El problema planteado habilita distintas direcciones a seguir. Se proponen a continuación algunas posibles, para las que se sugiere considerar momentos de trabajo en el aula similares a los descriptos para el problema 1.

2. Dados dos puntos fijos A y B en un plano, ubicar los puntos C de dicho plano de manera que ABC sea un triángulo rectángulo.

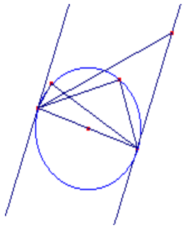

Figura 3

La exploración en torno a la resolución de esta consigna podría dar lugar a la definición de circunferencia como el lugar geométrico de los puntos del plano que forman ángulo recto con A y B, añadiendo éstos (ver figura 3).

3. Dados dos puntos fijos A y B en un plano, ubicar los puntos C de dicho plano de manera que el triángulo ABC sea obtusángulo.

Esta variante del problema permite discutir que los triángulos obtusángulos tienen el vértice opuesto a AB fuera de la faja de perpendiculares al segmento AB por sus extremos (cuando uno de los rayos del ángulo obtuso contiene al segmento AB). En el caso en que el ángulo obtuso sea el opuesto al segmento AB, los puntos C estarán en el interior de la circunferencia de diámetro AB mencionada en el punto 2.

Esta última cuestión permitiría dar lugar a la discusión acerca de una definición equivalente de ángulo obtuso (o agudo), dependiendo de si el vértice del ángulo es exterior o interior a una circunferencia[10].

4. El docente propone extender el problema considerando los infinitos planos que contienen al segmento AB.

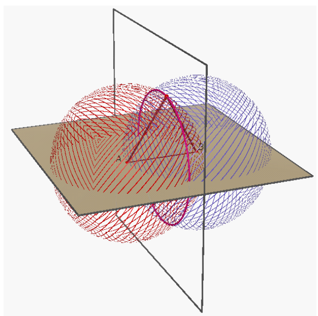

Figura 4

Esta ampliación permitiría abordar el concepto de lugar geométrico en tres dimensiones. Los lugares geométricos obtenidos al trabajar en el plano (mediatriz y circunferencias) constituyen las generatrices de las superficies de revolución que conducen a las soluciones de este nuevo problema (ver figura 4).

10 Con mayor precisión, un ángulo de vértice O y rayos h y k se clasifica en agudo u obtuso según O resulta exterior o interior a la circunferencia de diámetro PQ, determinado a partir de considerar dos puntos P y Q arbitrarios en estos rayos.

Abordado en el momento en que se estudia la Geometría analítica, la resolución del problema permite analizar los lugares geométricos que intervienen en la solución, a partir de las ecuaciones que los caracterizan. La decisión respecto de los diferentes sistemas de referencia que podrían adoptarse habilita la discusión en torno a su arbitrariedad. Además se pueden movilizar diferentes conocimientos como por ejemplo aquellos vinculados al álgebra vectorial (por ejemplo, la ortogonalidad de vectores), la noción de distancia euclídea, la intersección entre lugares geométricos a partir de la resolución de sistemas de ecuaciones (para determinar, por ejemplo, las posiciones de C para que resulte un triángulo rectángulo isósceles en el plano, o las posiciones de C en el espacio para obtener un triángulo equilátero que supone considerar la intersección de dos superficies esféricas).

Criterios para reconocer avances en la comprensión de los contenidos

En la matriz, hemos optado por incluir en la columna correspondiente al Nivel 2 aquellos criterios que suponen o bien una profundización de lo mencionado en el Nivel 1 o bien la incorporación de nuevos criterios que no se consideraron allí. Sin embargo el tipo de experiencias mencionadas en el Nivel 1 que recuperan las sugeridas en la sección A.2 deberían formar parte del Nivel 2, más allá de no haber sido explícitamente enunciadas.

Mapa de progreso

Lo construible, lo invariante, lo sintético, lo analítico
Descriptores del alcance de la comprensión

Nivel I. Alpromediar la formación inicial	Nivel I. Al finalizar la formación inicial	Nivel III. En los primeros años del desempeño profesional
Explora, conjetura, valida y demuestra propiedades de las figuras geométricas a partir de problemas de construcción mediante el uso de distintos instrumentos.	Analiza demostraciones de una misma propiedad identificando los distintos conocimientos desplegados y los supuestos asumidos por la comunidad de la clase y/o por la comunidad matemática. Produce e interpreta demostraciones a partir de diferentes conocimientos desplegados y supuestos asumidos.	Analiza críticamente desde los puntos de vista matemático y didáctico diferentes tareas que permitan abordar en el aula la exploración, la generación de conjeturas, la validación, el tratamiento de las definiciones y propiedades de las figuras y lugares geométricos. Genera consensos en el aula con referencia a los modos de validación en Geometría, las diferentes representaciones, los métodos o procedimientos aceptados, entre otros, teniendo como referencia los acuerdos convenidos en el seno de la comunidad matemática y los conocimientos de esa clase.
Produce distintas caracterizaciones de una figura geométrica obtenida a partir de diferentes relaciones geométricas, analiza la equivalencia entre ellas. Analiza las condiciones mínimas necesarias para caracterizar un objeto geométrico.		
Resuelve problemas de construcción condicionados por diferentes instrumentos geométricos tradicionales (regla y compás) y software de Geometría dinámica.	Resuelve problemas de construcción incorporando ins-trumentos mecánicos no tradicionales (trisecador de ángulos, pantógrafo, etc.) e interpreta la relación entre el funcionamiento del instrumento y las relaciones matemáticas puestas en juego.	Selecciona y secuencia tareas en función del tipo de relaciones que pretende movilizar en sus estudiantes mediante los problemas de construcción con distintos instrumentos.
Percibe a los instrumentos como objetos físicos fundamentados en objetos y relaciones matemáticas (el compás como el objeto que tiene detrás la circunferencia).	Analiza la Geometría a la que da lugar la restricción del uso de determinados instrumentos. Relaciona los instrumentos con las propiedades que se mantienen invariantes en la construcción.	Analiza distintos procedimientos desplegados por estudiantes de escuela media durante la resolución de problemas de construcción con distintos instrumentos.
Construye con regla y compás números construibles.	Estudia la posibilidad o imposibilidad de construcción de los números mediante el uso de regla y compás.	Analiza las producciones de los estudiantes e interviene para promover el avance en la resolución de un problema geométrico contextualizado en el conocimiento de los

Nivel I. Alpromediar la formación inicial	Nivel I. Al finalizar la formación inicial	Nivel III. En los primeros años del desempeño profesional
Utiliza las propiedades geométricas conocidas para dar lugar a la construcción de figuras y lugares geométricos y analiza la existencia y el número de soluciones.	Estudia la posibilidad de solución de problemas de construcción e incorpora el aporte del método analítico para fundamentar la no existencia de soluciones. Estudio de la imposibilidad de solución de problemas clásicos.	estudiantes.
Analiza la relación entre la construcción física y la construcción teórica accediendo a la consideración de la existencia de los objetos matemáticos. Analiza la dualidad entre la existencia física y la existencia teórica, en particular en el tratamiento del error en la medición.		Diseña y selecciona situaciones que habiliten la reflexión sobre el error en la medición y la importancia de controlarlo o no en función de los contextos implicados (generalmente extramatemáticos).
Resuelve problemas elaborando modelos en los que intervienen conocimientos geométricos.	Resuelve problemas elaborando modelos en los que intervienen conocimientos geométricos. Reconoce la utilización del V postulado de Euclides en la demostración de propiedades de la Geometría sintética. Analiza la no equivalencia de sistemas axiomáticos a partir del análisis de algunas propiedades como la suma de los ángulos interiores de un triángulo y su relación con el quinto postulado de Euclides.	Selecciona y diseña problemas en diferentes contextos cuyas resoluciones requieran de la elaboración de modelos matemáticos en los que intervengan conocimientos.
Explora, conjetura y demuestra propiedades que mantienen su invariancia por isometrías y semejanzas. Explora, conjetura y demuestra teoremas que movilizan la relación de semejanza (por ejemplo el teorema de Tales, las relaciones trigonométricas).	Explora y conjetura algunas propiedades que mantienen su invariancia por transformaciones afines y proyectivas. Establece relaciones entre las distintas transformaciones a partir de las propiedades que se mantienen invariantes.	Analiza críticamente desde los puntos de vista matemático y didáctico diferentes tareas que permitan abordar en el aula la exploración, generación de conjeturas y validación de propiedades que se mantienen invariantes por isometrías y semejanzas. Selecciona y secuencia tareas en función del tipo de relaciones que pretende movilizar en sus estudiantes en relación con las distintas transformaciones.
Relaciona los métodos sintéticos y analíticos para explorar las fórmulas de área de figuras bidimensionales y	Explora las medidas de magnitudes (área, perímetro, volumen) de algunos fractales.	Selecciona y diseña problemas que posibiliten la exploración y validación de fórmulas y el tratamiento de las

Matemática

Nivel I. Alpromediar la formación inicial	Nivel I. Al finalizar la formación inicial	Nivel III. En los primeros años del desempeño profesional
tridimensionales y volumen de figuras tridimensionales. Resuelve problemas trabajando las nociones de área y volumen como magnitud, en forma independiente de la formula y sin utilizar unidades de medida.		nociones de área y volumen como magnitudes independientemente del uso de fórmulas.
Pone en relación distintas aproximaciones a las cónicas y cuádricas a partir del método analítico y mediante el uso de diferentes registros (coloquial, gráfico y algebraico).	Pone en relación distintas aproximaciones a las cónicas y a algunas cuádricas a partir de los métodos sintético y analítico y mediante el uso de diferentes registros (coloquial, gráfico y algebraico). Analiza la conveniencia de los métodos analítico y sintético en la resolución de problemas. Analiza posibilidades de descontextualización -propias del registro algebraico- durante el tratamiento de los objetos geométricos involucrados en la resolución de un problema.	Selecciona problemas que habiliten el tratamiento de las cónicas consideradas en su proyecto de enseñanza mediante el uso de diferentes registros (gráfico, algebraico, numérico).

Núcleo 2: Lo analítico

Presentación del núcleo

Partiendo de los acuerdos epistemológicos y cognitivos señalados en la introducción y atendiendo a la formación docente, fundamentamos aquí las decisiones tomadas para presentar los elementos centrales del núcleo *lo analítico*[11].

Se encuentran en la Historia de la Matemática diversos problemas que dieron origen al pensamiento propio del Análisis. Podemos mencionar en el campo de los problemas físicos: el estudio de las variaciones de posición, velocidad, aceleración; en el campo geométrico: la identificación de la recta tangente a una curva o el cálculo de áreas bajo ella, entre otros. En sus inicios se avanzó en el conocimiento matemático con aproximaciones no formalizadas que requirieron el paso de muchos años de trabajo hasta constituirse en saberes formalizados y deductivamente organizados. El hecho de poder manejar, con herramientas matemáticas, "lo variable" resultó clave para aproximar respuestas a los problemas. Asimismo, la necesidad de formalizar tanto planteos como respuestas, requirió refinar el significado de lo infinitamente pequeño o grande, lo despreciable, lo infinitesimal, generándose conceptos (como el de límite o sucesiones) que hoy en día permiten sustentar deductivamente el Análisis. A partir de intereses de la Física, comenzó la necesidad de extender conceptos y resultados a espacios más generales, y de este modo se generalizaron múltiples resultados que

11 Con el nombre "lo analítico" en este núcleo nos referimos a aspectos del Análisis Matemático.

Matemática

ponen en evidencia cuestiones estructurales de fondo que no se advertían en los primeros resultados alcanzados. Debido a intereses propios de la Matemática se formalizaron deductivamente esos avances. Así, desde los primeros usos informales de los números reales, la completitud, la noción de límite, etcétera, se llegó, años más tarde, a un cuerpo de conocimiento preciso que constituye el Análisis topológicos. Se sumaron más problemas a estas construcciones, de optimización en Física, estudio de ondas, flujos, problemas de equilibrio, etcétera. Algunos de estos problemas produjeron nuevamente el avance de la Matemática, al facilitar la generación de nuevos saberes o permitir nuevas aplicaciones de conceptos ya desarrollados.

Aunque el conocimiento histórico permite tener un panorama de los desarrollos matemáticos y sitúa la construcción de conceptos en relación con problemas que los originaron, a la hora de la enseñanza no necesariamente indica una secuencia a seguir. Sin embargo, pone en evidencia complejidades inherentes a los objetos cuya identificación resulta útil para diseñar su aprendizaje.

En la formación inicial y continua de profesores de Matemática, los estudios histórico-epistemológicos contribuyen significativamente a la construcción de una perspectiva no tecnicista y que permita una comprensión profunda de la naturaleza de la ciencia. En este sentido, debemos considerar ciertos aspectos centrales, al pensar en la enseñanza de esta rama de la Matemática. Se hace necesario acercar a los estudiantes a nuevos sentidos de los objetos del Análisis que no formaron parte de sus experiencias en la escuela secundaria. A modo de ejemplo, mencionamos la complejidad de precisar nociones como la de números reales, el concepto de función, sucesiones, etcétera.

El conjunto de los números racionales es el que ha sido predominante en la formación, incluso favorecido por el uso de las calculadoras o computadoras no permitiendo una fácil comprensión de las diferencias entre él y el conjunto de los números reales. También vale mencionar respecto del concepto de función y del de sucesión, que escasamente son comprendidos y suelen ser utilizados en muchos casos, únicamente en tareas de tipo rutinario. Al margen de la complejidad inherente a los conceptos, otro aspecto a tener en cuenta es la complejidad lógica de las definiciones y resultados. Basta imaginar el concepto de límite, la comprensión se ve dificultada pues suele ocurrir que los estudiantes no han trabajado previamente con proposiciones cuantificadas con más de un cuantificador. También sería deseable considerar que algunas nociones centrales, como la de función o límite, pueden en primeros acercamientos ser comprendidas de un modo dinámico, poniéndose el énfasis en procesos que permiten primeros acercamientos a los conceptos, pero que no resultan suficientes (por ejemplo, hacer una tabla de valores para explorar un límite). Será necesario sobrepasar el enfoque puramente dinámico para obtener un acercamiento al objeto matemático, lo que requiere una intencionalidad expresa del docente y una profunda y compleja tarea cognitiva.

Lo mencionado anteriormente tiene la pretensión de fundamentar la presentación de los sub-núcleos que constituyen este núcleo al mismo tiempo que establecer las preguntas centrales, agrupadas en conceptos claves, que el futuro docente debería poder responderse al finalizar su formación inicial. Estos son:

- Lo variacional.
- Aproximaciones de lo no lineal.
- Lo infinitamente grande o pequeño.

Algunos interrogantes que refinan las preguntas centrales, que se presentan en el esquema, se mencionan a continuación.

- ¿Cuáles fueron las razones en la ciencia que motorizaron la idea de procesos variacionales?
- ¿Cuáles fueron las razones históricas/epistemológicas que dieron origen al Cálculo Infinitesimal?
- ¿Por qué se debe trabajar "la Matemática del cambio y del movimiento"? ¿Qué recursos matemáticos son apropiados para tal fin?
- ¿Qué significados de los procesos variacionales se ponen de manifiesto con más claridad en los distintos contextos en los que se trabaja (numérico, algebraico, verbal, gráfico, físico)?
- ¿Cuáles son las estrategias que deben utilizarse para modelizar?
- ¿Qué tipo de argumentaciones son propias del pensamiento típico del

Análisis?

- ¿Cómo permite el enfoque numérico avanzar en la solución de problemas analíticos?
- ¿Por qué dar existencia a los conceptos formales de límite, continuidad, derivadas, etc., como objeto de enseñanza?
- ¿Por qué es necesario formalizar las ideas intuitivas de límite, de infinito, de procesos arbitrariamente chicos o grandes, el concepto de número real, etcétera? ¿Qué desarrollos no podrían hacerse sin estas formalizaciones?
- ¿Qué tipo de planteos se pueden resolver sólo con números racionales? ¿Cómo se superan las limitaciones del trabajo con racionales?, ¿qué caracteriza al conjunto de los reales y los distingue del de los racionales?
- ¿Cuál es el significado matemático del infinito?
- ¿Qué propiedades aplicables a conjuntos finitos siguen valiendo en conjuntos infinitos? ¿Cuáles propiedades válidas para conjuntos finitos dejan de valer en conjuntos infinitos?
- ¿Cómo manejar la dinámica de los procesos (ej: límite) para que puedan comprenderse como objetos matemáticos?
- ¿Cómo reconocer y diferenciar los modos de pensamiento algebraico y aritmético en contraste con el propio del Análisis?

Objetivos específicos de aprendizaje

- Modelizar matemáticamente procesos variacionales a través de descripciones simplificadas de los fenómenos de la realidad.
- Utilizar modelos matemáticos para estudiar fenómenos, anticipar comportamientos variables, etcétera.
- Utilizar la intuición proveniente de los modelos físicos como medio para formalizar definiciones y teoremas e interpretar los resultados.
- Conocer desarrollos históricos de distintas nociones del Análisis.
- Utilizar métodos numéricos como herramienta para proponer soluciones aproximadas a problemas. Comprender las razones del funcionamiento de los métodos, compararlos y explicarlos.
- Comprender los conceptos y propiedades que permiten fundamentar el Análisis.

A continuación presentamos el esquema recordando la importancia de leerlo vinculado al resto de los elementos incluidos en el núcleo y considerando las fuertes relaciones que vinculan los núcleos entre sí.

Pensamiento variacional.

Pensamiento aritmético-algebraico-funcional.

Tratamiento de las igualdades.

Procesos de modelización matemática.

Método de resolución de problemas: Heurístico-Dialéctico-Aproximaciones analíticas y geométricas.

Métodos numéricos y su potencialidad para resolver problemas que no admiten solución exacta.

Utilidad de elementos analíticos para superar el enfoque geométrico.

Optimización de funciones.

Estudio de problemas de optimización, de la recta tangente a una curva y plano tangente a una superficie.

Problemas de optimización en Economía, Biología, Sociología, etcétera.

Uso flexible de las formas de representar los procesos variacionales: verbal (coloquial), visual, numérica y algebraicamente.

Argumentación, validación.

Sistemas de representación gráfica de funciones (coordenadas polares, cartesianas, etc.). Cambios de coordenadas. Parametrizaciones. Gráficos de curvas y superficies.

Recursos Tecnológicos: graficadores, planillas de cálculo, procesadores simbólicos, sistemas y plataformas informáticas.

Estudio matemático de nociones físicas, geométricas y de optimización (ondas, flujo del calor, velocidad, centros de gravedad, aceleración, problemas de máximos y mínimos, recta y plano tangente, etc.)

Superficies orientadas, trayectorias. Recta tangente a una curva y plano tangente a una superficie. Derivadas. Diferencial. Hessiano. Multiplicadores de Lagrange. Gradiente. Rotor. Integración en una y varias variables, cálculos de longitudes de curvas. Ecuaciones diferenciales. Series de potencia, Series de Fourier, Complejos. Funciones complejas, etc.

Vincula con los núcleos "Lo algebraico" y "Lo geométrico"

Las funciones: sus representaciones y su estudio

Funciones elementales de una y de varias variables. Tipos de funciones. Coordenadas: cartesianas, polares, etcétera. Funciones vectoriales. Funciones complejas (holomorfas). Función implícita.
Comportamientos funcionales, distintos elementos para su análisis (ceros/máximos/inflexión/punto silla, asíntotas, continuidad, etc.).
Resolución de ecuaciones. Proceso inverso y funciones inversas

Vincula con los núcleos "Lo algebraico" y "Lo probabilístico y lo estadístico"

LO INFINITAMENTE GRANDE O PEQUEÑO

¿Cómo precisar la noción de tendencia?
¿Qué caracteriza al conjunto de números reales y lo distingue del conjunto de los números racionales?
¿Qué precisiones matemáticas se requieren para formalizar las ideas intuitivas del Análisis?

LO VARIACIONAL

¿De qué modo describir matemáticamente la variación de los procesos que modelizan el mundo físico y material?
¿Cómo obtener información de procesos variacionales que permita describirlos, estimar magnitudes, optimizar procesos y predecir comportamientos?

APROXIMACIONES DE LO NO LINEAL

¿Cómo aproximar funciones?
¿Cómo obtener la mejor aproximación lineal de una función?
¿Cómo expresar analíticamente razones de cambio?
¿Cómo optimizar procesos?
¿Cómo estimar áreas y volúmenes?

Vincula con los núcleos "Lo numérico y aritmético", "Lo algebraico" y "Lo probabilístico y lo estadístico"

Vincula con el núcleo "Lo numérico y aritmético" y "Lo algebraico"

Métodos exactos y aproximados del Análisis

Aproximación de funciones mediante polinomios y mediante polinómicas a trozos. Recta y plano tangente. Fórmula de Taylor. Estudio de cotas de errores. Integración: métodos exactos y aproximaciones numéricas. Controles del error
Volúmenes de sólidos y volúmenes de revolución.
Vínculo entre derivación e integración.
Resolución numérica de ecuaciones. Métodos (bisección, Newton, etc.) y análisis de convergencia.

Elementos para fundamentar el Análisis

Teoría de conjuntos. Paradojas del infinito. Noción de sucesiones. Límite funcional. Series. Concepto de número real y conjunto de los números reales: construcción, expresión decimal. Completitud. Sucesiones de Cauchy. Tipos de infinito (numerabilidad y no numerabilidad). El concepto de función como terna funcional. Métricas. Generalizaciones de conceptos y resultados a espacios métricos y topológicos.

Las preguntas del esquema, así como las ampliatorias ya presentadas deberían responderse al ir considerando los grandes temas descriptos. Para lograr que se comprendan los grandes temas y las respuestas a las preguntas con sus alcances o limitaciones debemos considerar aspectos propios del saber matemático, que aquí detallamos y que se sintetizan en el recuadro de la izquierda del esquema. Resulta apropiado fomentar los métodos de trabajo propios del campo analítico como lo son: el pensamiento variacional, los métodos numéricos como herramienta para abordar problemas que no admiten solución exacta o ésta es de compleja obtención, la modelización matemática para describir simplificaciones de la realidad que sean abordables desde lo matemático, entre otros. Es necesario el trabajo con acotaciones de errores que permitan tener control sobre el grado de ajuste de las aproximaciones numéricas.

Para el tratamiento de todos los conceptos y problemas, enfatizamos la necesidad de una primera aproximación intuitiva a ellos para después, en una segunda etapa, lograr mayor precisión; por ejemplo, la construcción del concepto de función a partir de una primera presentación "intuitiva" relacionada con una relación entre variables, anterior a la formal.

Al mismo tiempo, sería deseable trabajar con problemas que originaron el Análisis (como el problema de encontrar la recta tangente a una curva, calcular el área bajo una curva, problema de la velocidad instantánea, de flujo, de ondas, etc.) y con problemas de optimización que son utilizados por otras áreas del conocimiento, como la Economía, Sociología, Ciencias de la Organización, Biología por ejemplo. Los problemas intra-matemáticos, cuya respuesta interesa a la comunidad matemática, también deberían tenerse en cuenta, como por ejemplo: la construcción de los números reales, la necesidad de fundamentar el Análisis y el modo en el que se logró hacerlo, generalizaciones de nociones (la noción de convergencia de funciones en distintos espacios métricos o la continuidad en espacios topológicos, entre otros), etcétera.

Se propone estimular la discusión respecto a cuestiones como: la conveniencia de la exploración como forma de aproximarse a comprender los problemas poniendo en juego distintos recursos matemáticos, por un lado, y su alcance limitado frente a la potencia de los conceptos y sus propiedades, por el otro; la noción de infinito actual y potencial, el hecho de conocer los desarrollos históricos de las nociones con el objetivo de ampliar las concepciones filosóficas sobre los objetos así como para pensar proyectos de enseñanza que permitan recuperar en el aula diferentes sentidos, la dificultad de sobrepasar la comprensión puramente dinámica de conceptos como el de límite o función, para aprehenderlos como objetos matemáticos, el entendimiento de las relaciones que estructuran las ideas del Análisis, entre otras.

En este núcleo cobra relevancia el uso flexible de las formas de representar los procesos variacionales: mediante el uso de la lengua natural, la comprensión de las representaciones gráficas, el acercamiento numérico y lo algebraico. Sería interesante que el lenguaje simbólico sea usado para comunicar resultados o conceptos que pueden ser explicados en lengua natural, para extraer información a partir de ellos y expresarla en lengua natural (cuando un concepto o propiedad se presentan de ese modo por primera vez) o para extraer nueva información del objeto representado luego de trabajar con los símbolos. Sugerimos que las argumentaciones, justificaciones y demostraciones propias del campo estén presentes en todo momento, aceptando distintos grados de precisión en ellas, justificaciones provisorias o incompletas favoreciendo su gradual mejoramiento. Necesariamente las argumentaciones y explicaciones necesitan expresarse en lengua natural (a la vez que utilizando el lenguaje simbólico) para poner de manifiesto no solo la comprensión de lo expuesto sino para promover el aprendizaje del uso apropiado de la lengua. El uso de la notación simbólica sería necesario que se explique, poniendo de manifiesto la diferencia entre el modo de hablar y el uso de los símbolos (orden en el que se presentan los símbolos a diferencia del orden en el que se habla, por ejemplo).

La comunicación a través de los gráficos podrá darse en distintos tipos de coordenadas, cada una de las cuales mostrará su utilidad al momento de resolver problemas.

Se sugiere promover el uso de recursos tecnológicos como software graficadores, o procesadores simbólicos, al tiempo que el uso de plataformas informáticas específicas permitiría un trabajo cooperativo ante ciertas actividades al tiempo que sería una práctica del uso de un recurso que, a la hora de pensar en la enseñanza, tal vez resulte útil.

Experiencias sugeridas para desarrollar durante la formación superior

Describimos algunas experiencias que se sugiere se incorporen al trabajo planteado para los estudiantes, por considerarlas indispensables para alcanzar la comprensión de los aspectos señalados en este documento.

- Los estudiantes realizan, en grupo, rastreos históricos de nociones matemáticas tomando distintas fuentes y siendo capaces de identificar problemas que dieron origen a las nociones en cuestión. En base a lo indagado en el rastreo histórico, identifican posibles fuentes de dificultades que pueden encontrar los estudiantes y estudian la conveniencia del diseño de propuestas didácticas que recuperen antiguos sentidos.
- Los estudiantes se enfrentan con la resolución de problemas (o los que originan los conceptos, o de optimización, etc.) cuya resolución desconocen, elaboran acercamientos, identifican que los conocimientos disponibles no son suficientes para resolverlos, si es necesario buscan información en textos de nivel superior, sintetizan información, la explican oralmente, retoman la actividad con herramientas matemáticas apropiadas y analizan el tipo de actividad matemática puesta en juego.
- Los estudiantes modelizan situaciones reconociendo qué hipótesis adicionan, qué variables descartan, cómo es el planteo del problema matemático que se le puede asociar a la situación inicial, lo resuelven, verifican la solución, reformulan el modelo en caso de la no adecuación de la misma. En retrospectiva, reconocen las etapas transitadas en el proceso de modelización matemática.
- Exploran con graficadoras el comportamiento de funciones desconocidas, planteando conjeturas sobre su comportamiento. Luego, abordan la justificación de las conjeturas con herramientas matemáticas.
- Utilizan procesadores simbólicos para resolver actividades de cálculo. Estudian casos en los que los procesadores no son útiles y explican matemáticamente errores de los mismos.
- tilizan recursos computacionales para operar numéricamente al momento de resolver situaciones con métodos numéricos. Comparan el uso de estos recursos con el uso del papel y lápiz.
- Los estudiantes presentan argumentos que defienden alguna posición (por ejemplo la convergencia de un método para estimar raíces de funciones) ante sus pares quienes pueden complementar la argumentación con otros elementos matemáticos (en el ejemplo que se puso entre paréntesis aquí mismo: convergencia más rápida, condiciones para la aplicabilidad del método, etcétera).

Un ejemplo de consigna para trabajar en alguna experiencia del tipo de las descriptas

Se supone trabajado el concepto de límite funcional con la definición épsilon-delta.

Primer momento (trabajo individual)[12]

A Pedro se le presentó una función $f: R \rightarrow R$ y se le pidió calcular el límite de f cuando x tiende a cero. Él propuso números cercanos a cero por izquierda y por derecha y construyó la siguiente tabla:

x	f(x)
- 0.1	0.9
- 0.01	0.99
- 0.001	0.999
- 0.0001	0.9999
- 0.00001	0.99999
- 0.000001	0.999999
- 0.0000001	0.9999999
- 0.00000001	0.99999999
0.1	1.1
0.01	1.01
0.001	1.001
0.0001	1.0001
0.00001	1.00001
0.000001	1.000001
0.0000001	1.0000001
0.00000001	1.00000001
0.000000001	1.000000001

A partir de la información de la tabla, te preguntamos, para cada uno de los siguientes casos, ¿qué se podría afirmar, y por qué razón, sobre el límite de la función f cuando x tiende a cero?

a) Si únicamente se dispone de la información suministrada por la tabla anterior.

b) Si la tabla se puede seguir generando indefinidamente manteniendo la misma tendencia y forma de completarse que utilizó Pedro.

12 Idea de la actividad tomada de Colombano, Rodríguez, Una propuesta para atender la persistencia del modelo dinámico-práctico luego de la enseñanza de límite funcional, (2009), Memorias del 10º Simposio de Educación Matemática, formato CD.

Respuestas esperadas a cada ítem son las siguientes.

a) Deberían responder que la tabla conformada con una cantidad finita de valores no es suficiente para arriesgar el valor de un límite, ni siquiera su existencia

b) Es altamente probable que en el caso b) el estudiante considere que si la tabla siguiera generándose del mismo modo, el límite sería 1, lo que es incorrecto. Para ello se propone la siguiente consigna.

Segundo momento (trabajo en grupos)

c) Marta presentó para el mismo problema, la siguiente tabla de valores que sigue completándose con el mismo criterio. ¿Qué indicaría esta tabla respecto del límite de la función cuando x tiende a 0? ¿Cómo se respondería nuevamente a la pregunta del ítem b) anterior?

x	f(x)
- 0.1	0.9
- 0.01	0.99
- 0.001	0.999
- 0.0001	0.9999
- 0.00001	0.99999
- 0.000001	0.999999
- 0.11	3
- 0.011	3
- 0.0011	3
- 0.00011	3
0.1	1.1
0.01	1.01
0.001	1.001
0.0001	1.0001
0.00001	1.00001
0.000001	1.000001
0.0000001	1.0000001
0.00000001	1.00000001
0.11	3
0.011	3
0.0011	3
0.00011	3

d) Exhibir simbólicamente una tal función y mostrar gráficamente el comportamiento de ella.

e) ¿En qué parte de la definición de límite se toman en consideración los valores asignados a la variable independiente que están presentes en una tabla de valores? ¿Se desprende de la definición que si la tabla se construyera evidenciando una tendencia, ese hecho garantiza un resultado para el límite? Explicar en palabras, numéricamente y gráficamente.

Respuestas esperadas

En c) se espera que el estudiante advierta que la tabla de valores no es suficiente para asegurar un límite, con lo que se prevé que como respuesta al punto b) ahora diga "puedo afirmar que si existe el límite, éste será 1. No puedo asegurar su existencia".

En el d) se promueve un trabajo algebraico para obtener

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \textit{si} \quad x=x_n \\ 3 & \textit{si} \quad x\neq x_n \end{cases} \qquad \textit{siendo} \qquad x_n=\begin{cases} 10^{-\frac{n}{2}} \\ -10^{\frac{(n+1)}{2}} \end{cases}$$

Al mismo tiempo, se espera que el estudiante advierta el comportamiento no sólo desde lo numérico sino en un gráfico.

e) ¿En qué parte de la definición de límite se toman en consideración los valores asignados a la variable independiente que están presentes en una tabla de valores? ¿Se desprende de la definición que si la tabla se construyera evidenciando una tendencia, ese hecho garantiza un resultado para el límite? Explicar en palabras, numéricamente y gráficamente.

Tercer momento domiciliario (trabajo individual)

f) Buscar en al menos un texto de Matemática de nivel superior otra definición o una caracterización de la noción de límite funcional que no sea la que utiliza épsilon-delta[13]. Presentarla simbólicamente y explicar por escrito utilizando la lengua natural qué significa.

Cuarto momento (trabajo grupal en clase nuevamente)

g) Utilizando la definición alternativa, explicar lo trabajado en los ítems a) y c).

h) Dejar por escrito conclusiones de lo realizado y prever posibles errores en los estudiantes al momento de estudiar esta noción. Vincular esta respuesta con formas de presentar el concepto.

13 Se espera la siguiente definición o caracterización: sea $f: I \subset R \to R$ (I abierto), $a \in I$ (no necesariamente f definida en a). El límite de f cuando x tiende a α es L si y sólo si toda sucesión $\{x_n\}_n \in_N$ (con $x_n \neq a\ \forall n \in N$) que converge a α satisface que $\{f(x_n)\}_{n \in N}$ converge a L.

Respuestas esperadas

Se espera que comprendan la definición o caracterización de límite vía sucesiones y que expliquen que el hecho de conocer el comportamiento de las imágenes de una (o una cantidad finita) sucesión (como la tabla muestra), no basta pues se requiere que todas las sucesiones que tienden al punto analizado cumplan que sus imágenes tienen el mismo comportamiento.

Se espera la búsqueda de información matemática, la lectura autónoma y la explicitación de la comprensión utilizando lenguaje natural, simbólico, numérico y gráfico.

Se prevé una anticipación de dificultades que estudiantes de nivel secundario seguramente tendrán al momento de estudiar la noción y el vínculo con la forma de presentar el tema de la mano del profesor (el abusivo uso de tablas en la enseñanza, induce esta concepción errónea de que la dinámica manifestada en ellas basta para conocer los límites. Al mismo tiempo, el recurso de la tabla es altamente adoptado porque se ha mostrado útil en el contexto de graficar funciones.

Criterios para reconocer avances en la comprensión de los contenidos

Mapa de progreso

Lo lineal para aproximar lo no lineal. Lo variacional. Lo infinitamente grande o pequeño.
Descriptores del alcance de la comprensión.

Nivel I. Alpromediar la formación inicial	Nivel I. Al finalizar la formación inicial	Nivel III. En los primeros años del desempeño profesional
Conoce el origen histórico, tanto geométrico como físico de las nociones de derivada y área bajo una curva. Identifica en la derivación y en la integración procesos inversos. Optimiza procesos operando con derivadas y valida argumentaciones y demostraciones en los distintos registros. Resuelve problemas de baja complejidad tanto de optimización como de aplicaciones a otras áreas. Explora procesos inversos referidos a funciones y analiza cómo se manifiestan en las distintas representaciones. Aplica las herramientas del cálculo para plantear o resolver problemas de la física, la Geometría y de optimización.	Usa flexiblemente las derivadas en contextos de funciones de varias variables. Vincula con diferenciabilidad. Comprende la extensión de las nociones a varias variables Resignifica los procesos inversos de derivación e integración vinculándolos con los problemas que les dieron origen. Usa técnicas analíticas para el planteo de soluciones a problemas físicos Plantea y resuelve problemas físicos, geométricos y de optimización. A partir de soluciones simbólicas a problemas extrae información en términos de los problemas.	Organiza secuencias didácticas para enseñar el concepto de derivada utilizando distintos problemas en los que se pone de manifiesto el interés por el concepto. Utiliza la evolución histórica del concepto de derivada para proponer actividades grupales que generen la discusión de los avances, retrocesos y controversias en el surgimiento del concepto. Propone situaciones físicas adaptándolas al nivel secundario. Selecciona y secuencia actividades para que los estudiantes puedan realizar ejercicios interactivos que utilicen razones de cambios en nuevos contextos.

Nivel I. Alpromediar la formación inicial	Nivel I. Al finalizar la formación inicial	Nivel III. En los primeros años del desempeño profesional
Calcula la rectas o planos tangentes a distintas funciones en un punto. Los utiliza para aproximar resultados. Utiliza recursos tecnológicos para explorar posibles soluciones a problemas (tangencia, extremos, etcétera).	Entiende el concepto de recta/plano tangente a una función como la mejor aproximación lineal local de ella en un entorno del punto. Define con precisión las nociones. Acota resultados aproximados en los que utilizó planos o rectas tangentes o métodos aproximados para el cálculo de área o ecuaciones no lineales.	Diseña instrumentos de evaluación de proceso y de resultado para evaluar por escrito y oralmente la comprensión de conceptos y propiedades del Análisis.
Modeliza a través de funciones procesos descriptos en lengua natural o numéricamente, reconociendo que debe utilizar con la terna funcional. Explora intuitivamente conceptos y propiedades. Describe el comportamiento de funciones verbal, gráfica y numéricamente de forma manual y/o calculadora/graficadores, para visualizar el comportamiento de funciones de una y varias variables, utilizando distintas coordenadas. Reconoce lo complejo de describir numéricamente funciones trascendentes. Utiliza software graficadores para explorar su comportamiento.	Extrae información matemática de la modelización de procesos (tanto sea que esté dada simbólica, numérica o gráficamente) para resolver problemas/situaciones de la vida real. Utiliza los conceptos del análisis para estudiar funciones. Analiza las funciones mediante series. Utiliza las mismas para estimar valores. Conoce el modo en que las calculadoras estiman sus resultados. Reconoce un problema que no admite solución exacta y utiliza recursos tecnológicos para aproximar una solución posible, controlando el error cometido. Argumenta respecto de la no validez del método inductivo para proponer una generalización que describa una secuencia finita que aparenta un patrón de construcción.	Analiza actividades para decidir si su resolución exige realizar el proceso de modelización (o son situaciones que solo requieren la traducción al lenguaje simbólico). Propone actividades que se resuelvan elaborando modelos matemáticos. Selecciona, analiza y propone actividades apropiadas para presentar y desarrollar las funciones trascendentes, atendiendo a las particularidades de las curvas y manejando la globalidad de las mismas a la vez que cuestiones locales. Ajusta actividades propuestas en función de las respuestas de los estudiantes, los errores usuales y la experiencia acumulada.
Utiliza la exploración numérica o gráfica como recurso para abordar situaciones cuya solución desconoce. Identifica distintas lógicas de construcción de patrones a partir de secuencias (numéricas o geométricas) Dispone de elementos para verificar resultados. Argumenta, tal vez no con absoluta precisión, razones que explican sus procedimientos.	Resuelve ecuaciones diferenciales, sistemas de ecuaciones diferenciales, decidiendo el modo de encarar su resolución. Incorpora la verificación de resultados como parte del proceso de resolución de una tarea. Argumenta con precisión, razones que explican sus procedimientos.	Utiliza métodos inductivos en clase para favorecer el acercamiento a la comprensión de conceptos que requieren del dominio de procesos infinitos. Argumenta respecto de la validez matemática del procedimiento Selecciona y diseña actividades que habiliten a la reflexión para superar la concepción dinámica de la noción de función y aproximen a la comprensión como objeto. Diseña modos de indagar las concepciones previas o rep-

Nivel I. Alpromediar la formación inicial	Nivel I. Al finalizar la formación inicial	Nivel III. En los primeros años del desempeño profesional
Conoce desarrollos históricos de conceptos del Análisis. Maneja el concepto intuitivo de límite desde la exploración numérica, el acercamiento gráfico y el estudio de las expresiones simbólicas y sus propiedades.	Maneja fluidamente distintas formas de representar funciones de varias variables. Entiende los cambios de coordenadas y los utiliza apropiadamente. Anticipa dificultades de aprendizaje de conceptos del Análisis vinculándolas (cuando es posible) con la génesis histórica. Conoce y aplica las definiciones de límite, diferenciabilidad, integrabilidad, etcétera.	resentaciones mentales que los estudiantes tienen sobre nociones como función, límite, recta tangente, etcétera. Propone actividades para argumentar sobre comportamientos funcionales. Organiza tareas para discutir sobre la validez de las argumentaciones. Diseña actividades que utilizan distintas representaciones de la noción (verbal, simbólico, numérico o gráfico) fluida y flexiblemente y reflexiona respecto de la validez matemática en la solución de problemas de análisis.
Opera con números reales, resuelve límites, derivadas, ecuaciones diferenciales, integrales, convergencia de sucesiones, series. Aplica métodos numéricos y obtiene soluciones aproximadas a: ecuaciones no lineales, integrales, ecuaciones diferenciales, etc. Reconoce que los resultados obtenidos son aproximados, aunque no controle el error cometido.	Analiza y explica por escrito y oralmente definiciones, propiedades y demostraciones de resultados de conceptos del Análisis. Analiza la existencia y unicidad de soluciones a ecuaciones diferenciales, ecuaciones no lineales, etcétera. Acota errores al estimar numéricamente soluciones.	Prevé dificultades en la comprensión de conceptos matemáticos básicos (funciones, límite) a partir del conocimiento de su evolución histórica Diseña actividades que atiendan a trabajar con las dificultades de comprensión de conceptos que la Historia anticipa. Explica las ideas intuitivas de límite utilizando ejemplos cotidianos y representaciones gráficas, numéricas y simbólicas. Anticipa errores en el cálculo de límites vinculados con concepciones de la noción que son resistentes a la enseñanza. Utiliza las ideas que estructuran el Análisis para proponer actividades.
Opera con funciones y manipula ternas funcionales. Maneja los conceptos de completitud, convergencia de sucesiones y series, límites, diferenciabilidad en los espacios más simples.	Comprende la necesidad matemática de distinguir una expresión algebraica de una función (terna) y conoce su definición formal. Extiende nociones del Análisis a otros espacios (noción de completitud, convergencia de sucesiones, límite, dife-	Selecciona y diseña actividades que pongan en juego ternas funcionales para que argumenten respecto del abordaje o no de su definición formal en el nivel secundario.

Nivel I. Alpromediar la formación inicial	Nivel I. Al finalizar la formación inicial	Nivel III. En los primeros años del desempeño profesional
Comprende la estructura lógica de teoremas y la necesidad de plantear todas las hipótesis, siendo capaz de dar contraejemplos si alguna se quitara. Reconoce que debe lograr mayor precisión en los conceptos y que los acercamientos intuitivos no son matemáticamente suficientes para comunicar resultados con exactitud.	renciabilidad, etcétera). Explica planteos matemáticos utilizados para describir problemas físicos. Puede encarar la demostración de resultados teóricos que no le han sido enseñados, comprendiendo qué es lo que debe demostrar, cómo se utilizan los datos, etcétera. Comprende y utiliza apropiadamente teoremas que fundamentan el Análisis.	

Núcleo 3: Lo numérico y lo aritmético

Presentación del núcleo

El contenido de este núcleo que hemos denominado "lo numérico[14] y lo aritmético" ha sido caracterizado en consonancia con sendos contextos de usos propios de la actividad matemática. Específicamente cuando nos referimos a contexto numérico estamos considerando la red de relaciones matemáticas que se producen ante situaciones que se plantean en el seno de diferentes conjuntos numéricos. En primer lugar se explicita una fundamentación didáctico-matemática sobre el porqué de su existencia como núcleo que problematiza ciertos aspectos de la actividad matemática y cómo funciona en diferentes procesos de estudios, en segundo lugar los interrogantes que nos movilizan para su definición en este trabajo y por último el propósito que justifica su enseñanza, desde esta perspectiva, en la formación inicial de los profesores de Matemática.

En efecto, es compartido en los ámbitos de estudio sobre los problemas de enseñanza y aprendizaje de la Matemática que si se conciben las operaciones como relaciones y se identifica la estructura de los problemas esto resulta un primer paso indispensable para ubicar el trabajo numérico y/o aritmético en una perspectiva de generalización, la cual es inherente a la actividad matemática[15]. Además se los debería considerar como objetos de reflexión, proceso que no se puede obviar en la búsqueda de una mayor comprensión de los diferentes conjuntos numéricos. Debemos ser concientes que justamente estos objetos matemáticos permiten recuperar conocimientos construidos y desarrollados desde algún lugar y con algún significado en la escuela secundaria.

Por otra parte, los ejes explicitados en la introducción del documento que actúan como reguladores de la actividad matemática propuesta para este núcleo, tal como se anticipara en la introducción del documento, permiten identificar el sistema de elementos que se ponen en juego en los diferentes procesos de estudio propuestos y se sintetizan, especificados en los saberes que trata de atrapar

14 Con el nombre de "lo numérico" hacemos referencia a los diferentes conjuntos de números, no considerando en este núcleo los métodos computacionales que resuelven cálculos numéricos.

15 Posición inspirada en lo expresado sobre este fenómeno en Sadovsky, P. (2003); Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas. Tesis Doctoral.

este núcleo, en la columna vertical del esquema. En este marco, proponemos como interrogantes que motorizan el contenido de este núcleo a los siguientes.

- ¿Cuáles son las razones en la ciencia Matemática que movilizaron las ampliaciones sucesivas de los campos numéricos?
- ¿A qué tipo de problemas responden los números enteros? ¿Y los decimales? ¿Y los racionales? ¿Y los irracionales?
- ¿Se modifican, y de ser así cómo, las propiedades de los "números" en cada nueva ampliación ¿Y las propiedades de las operaciones?
- ¿Cómo se pueden contar los elementos que conforman distintas colecciones? ¿existen formas más económicas?
- ¿Cómo relacionar los racionales con los decimales con parte decimal finita o periódica y con la medida de magnitudes continuas?
- ¿Por qué es necesario entender que los números primos conforman una base multiplicativa de los números naturales y enteros?, ¿qué ventajas proporciona con respecto a sólo tener técnicas de descomposición en factores de los números naturales y enteros?
- ¿Por qué es necesario pensar la operación división como una relación? ¿Cuál es su potencia matemática?
- ¿Qué tipo de problemas resuelven las relaciones de divisibilidad y de congruencia? ¿Responden a problemas similares? ¿Con cuáles otros conceptos, operaciones, propiedades, definiciones, se asocian? ¿Qué tipo de argumentación permite diferenciarlos o determinar los casos en que son lógicamente equivalentes estas dos relaciones?
- ¿Qué formas de representación operativizan las principales funciones y usos de la divisibilidad y de la congruencia?
- ¿Por qué dar existencia a los conjuntos numéricos como objetos de enseñanza?
- ¿Qué caminos permiten ir de lo finito a lo infinito?
- ¿Por qué son necesarios y se deben enseñar relaciones como la de divisibilidad, congruencia, máximo común divisor, ecuación diofantina o métodos como la recurrencia?
- ¿Qué contextos dejan al descubierto el o los significados de estas relaciones, de estos conceptos, de estos métodos, que se pretenden enseñar? ¿Cuáles ayudan a comprender sus diferencias y similitudes?
- ¿Qué procesos dialécticos tanto intra como inter-disciplinares permiten cambios y evolución de significados de los objetos estudiados?

Estos cuestionamientos pretenden orientar la búsqueda de un claro propósito para la enseñanza de este núcleo que es construir un sentido más interno de las operaciones elementales en los conjuntos numéricos: N, Z, D[16], Q e I, en torno al cual se reorganizarían los significados que los estudiantes tienen apropiados a lo largo de los años de trabajo escolar en la escuela media. En otras palabras, se propone en este nivel estudiar las operaciones aritméticas como objetos matemáticos en sí mismos. En el campo de la Didáctica de la Matemática se reconoce a este proceso de estudio como proceso de algebrización, el cual supone un trabajo cada vez más explícito de generalización. La generalización, puesta a funcionar específicamente en los contextos numérico y aritmético, nos permite determinar como nodos problemáticos de este núcleo tanto al estudio de los conjuntos numéricos y de las operaciones elementales consideradas relaciones definidas en tales conjuntos, como a sus métodos propios de trabajo, tal es el caso del razonamiento por recurrencia. O sea nos habilita a presentar en este núcleo, los siguientes sub-núcleos.

- Los conjuntos numéricos y sus operaciones
- Las operaciones como relaciones
- La recurrencia.

El objetivo principal es plantear a estos sub-núcleos sintetizados en interrogantes alrededor de los cuales se puedan organizar procesos de enseñanza que debieran incluir los grandes temas del núcleo.

En esta síntesis se pueden identificar los aportes de las dos fuentes de proble-mas para este trabajo, tanto la didáctica-matemática como la epistemológica. En efec-

16 Conjunto de las fracciones cuyo denominador es producto de potencias de 2 y de 5.

to, la primera nos permite poner al descubierto lo que es intrínseco al pensamiento matemático: la exigencia de tender a la generalización de los objetos que lleve no sólo a completar teorías, sino tratar de hacerlo de tal forma que se pierda la referencia de las situaciones concretas que les dieron origen. La segunda nos permite, considerando la historia de la Matemática como generadora de cuestiones, rescatar las relaciones que estructuraron los problemas centrales de la aritmética y que han permitido una importante evolución en el modo de pensar matemático.Tal es el caso de aquellas relaciones matemáticas que facilitan contar los elementos de un conjunto sin tener que listarlos uno a uno, lo que conlleva por un lado, a potenciar la producción de fórmulas para contar colecciones como uno de los necesarios caminos a transitar para iniciar a los estudiantes en el estudio del álgebra, también a reconocer la importancia de identificar relaciones que permitan particionar un conjunto utilizando cierto tipo de propiedades para que por ejemplo, se pueda construir una aritmética finita a partir de la aritmética de Z.

Asimismo existe consenso -en el ámbito donde se discute el origen y desarrollo del conocimiento matemático- en "entender" que la Matemática antigua se caracterizaba por una tensión permanente entre método y objeto[17]. Las relaciones numéricas indican la dirección por donde avanza la investigación de la Matemática griega, pues no sólo indica el principio sino también el final de lo que proponían los matemáticos de la época, o sea el problema de la búsqueda de "generalidad" de los métodos implica no linealmente, sino dialécticamente, la búsqueda de la generalidad de los objetos. La necesaria presencia de que se operativice en los procesos de enseñanza esta relación dialéctica entre: objetos y métodos, se trata de representar en el gráfico de este núcleo con flechas, de doble sentido.

Este posicionamiento epistemológico necesita complementarse con hipótesis cognitivas y didácticas, ya que con este documento se pretende plantear recomendaciones para formar profesores de Matemática.

Es así que, además, sostenemos que existe un amplio acuerdo en que abstracción y generalidad son características esenciales que deben desarrollar los estudiantes para que se comprenda el conocimiento matemático. Una dicotomía que ambos términos presentan es que se refieren tanto a un proceso mental como al producto derivado de tal proceso. Desde el punto de vista educativo los dos son importantes, tanto si consideramos los procesos como si consideramos los resultados. A un futuro profesor de Matemática debe interesarle, de manera especial, el papel que juegan dichos procesos en la construcción de los objetos matemáticos.

Es por ello que para avanzar en la organización de un marco de referencia de un proceso de estudio aritmético se considera también necesario realizar la distinción ya realizada por los griegos, entre el estudio de las técnicas calculatorias por un lado, y lo que hoy se conoce como Teoría de números o Aritmética Superior donde se plantea como eje de desarrollo el estudio de las propiedades de los números enteros. Se propone centrar el estudio de esta temática sobre diferentes problemáticas generadoras de sendos procesos de enseñanza. En efecto, se identifica como un problema básico lo que Euclides dejó inconcluso en su trabajo matemático: los métodos propiamente aritméticos (algunos de los cuales que se despliegan en la recurrencia) con una simbología propia, cuya génesis se remonta a Diofanto (siglo III d.C) con la introducción del concepto de *arithmo* (génesis del símbolo algebraico) y a los números primos como las piedras de construcción de la descomposición multiplicativa de la Teoría elemental de Números Enteros[18]. Asimismo la búsqueda y explicitación de invariantes dentro de un conjunto de transformaciones, problemática inherente a la propia actividad matemática, al igual que la ya mencionada tensión constante entre la búsqueda de métodos generales y el reconocimiento de la generalidad en los objetos, desarrolla en el ámbito de la aritmética la construcción de nuevos objetos matemáticos como "la congruencia" que en tanto relación de equivalencia definida en Z permite establecer importantes relaciones entre las ecuaciones algebraicas y la divisibilidad. En otras palabras la noción de congruencia es emergente de un cambio en el pensamiento matemático, más allá de las nuevas técnicas y resultados teóricos que también se logran crear y demostrar en este ámbito de la Matemática, transformándose en uno de los objetos esenciales en los que se basa el proceso de algebrización de la Aritmética. Es indudable que esto justifica sin ambigüedad la necesidad de su incorporación como otro de los elementos que ayudan a transitar, al futuro profesor de Matemática, el camino

17 Tensión planteada en Piaget, J. y García, R.; (1984), Psicogénesis e Historia de la Ciencia. Siglo XXI. Madrid.

18 Idea extraída de Newman J (1997). El mundo de las matemáticas. Tomo 4 Grijalbo-Barcelona. Sigma.

de la comprensión de la ciencia que debe enseñar.

Objetivos específicos de aprendizaje

Teniendo en cuenta los interrogantes que motorizan el contenido de este núcleo, formulamos los siguientes objetivos específicos de aprendizaje.

- Favorecer la detección de regularidades que facilite tanto la construcción de un término general de una sucesión, la determinación de una propiedad de los números enteros, como hacer más plausible el planteo de distintas conjeturas en el campo de lo numérico y aritmético.
- Reconocer criterios que determinan una relación entre números y expresarlos a través de una generalización.
- Reconocer la importancia de la división entera para expresar números en diferentes sistemas posicionales.
- Elaborar un sentido de las operaciones elementales en los diferentes conjuntos numéricos.
- Resignificar los conocimientos numéricos y aritméticos en términos de objetos de enseñanza, comprendiendo cómo se originaron, la naturaleza de los problemas que resuelven y las relaciones entre los mismos y con otras disciplinas.
- Confrontar y comunicar con claridad procesos y argumentaciones, utilizando diferentes marcos de representación y el lenguaje adecuado.
- Poner a funcionar los procesos recurrentes y "la recurrencia" como método general de resolución de un problema, expresando la solución del mismo mediante una versión más sencilla y al proceso de reducción en forma de algoritmo recurrente.
- Comprender la potencia modelizadora de los números primos como base multiplicativa de los números naturales y enteros.
- Construir una aritmética de los polinomios en relación con la aritmética en Z.
- Reconocer la divisibilidad como un campo fértil que permite transitar uno de los caminos de iniciación al álgebra.
- Revisar ciertas propiedades y nociones definidas para un cierto conjunto numérico con relación a las ampliaciones numéricas que se realicen.

En la siguiente página presentamos el esquema recordando la importancia de leerlo vinculado al resto de los elementos incluidos en el núcleo y considerando las fuertes relaciones que vinculan los núcleos entre sí.

Relaciones con otros objetos: están determinadas por las vinculaciones con los otros núcleos. Por ejemplo números especiales como números de Fibonacci, Fractales, algoritmos computacionales, entre otros.
Tipos de argumentaciones: se reconocen tanto las reguladas por las condiciones del contexto, como las inductivas y/o las deductivas.
Diferentes formas de comunicación: uso de lenguaje verbal, gráfico, simbólico no como simple traducción sino como herramienta para la evolución de significados. Uso de software para cálculo simbólicos.
Conexiones intra e inter disciplinar: como por ejemplo los números especiales como emergentes de problemas de conteo o funcionando en las ciencias naturales.

Algoritmo de la división entera: El problema de la existencia y de la unicidad. Su relación con la divisibilidad.

Vincula con el núcleo "Lo algebraico"

Números primos como base para la descomposición multiplicativa de los enteros. Teorema fundamental de la aritmética. La importancia del funcionamiento tanto de la existencia como de la unicidad

LAS OPERACIONES COMO RELACIONES
¿Qué propiedades de los números se conservan y/o se modifican al cambiar de conjunto numérico? ¿Y las propiedades de las operaciones?

¿Cómo se vincula la relación de divisibilidad en Z con la resolución de ecuaciones? ¿Cuál es el alcance de la relación de divisibilidad?

Vincula con el núcleo "Lo algebraico"

MCD - Algoritmo de Euclides, y su relación con la resolución de ecuaciones diofánticas.
Congruencia como relación y como técnica para resolver nuevos problemas aritméticos.

Los naturales como conjunto inductivo y ordenado. Los enteros como conjunto discreto y ordenado. Los decimales como primer conjunto numérico denso. Los racionales en sus diferentes expresiones y como conjunto ordenado y denso. Sus limitaciones para la completitud de la recta. La propiedad arquimediana.

Vincula con los núcleos "Lo algebraico" y "Lo analítico"

LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS Y SUS OPERACIONES
¿Qué significa "a dividido b" en cada conjunto numérico?
¿Cómo se cuentan los elementos de una colección?

El método del descenso infinito como base para entender y aplicar el principio de inducción.
Sucesiones definidas por recurrencia.
Números especiales: de Fibonacci y otros

LA RECURRENCIA
¿Qué camino permite ir de lo finito a lo infinito?
¿Cómo se construyen propiedades generales de los números y de ciertas operaciones?
¿Cómo hacer más accesibles estos objetos a través de un método más general?

Vincula con los núcleos "Lo probabilístico y lo estadístico" y "Lo algebraico"

Producción de fórmulas, generación de particiones, representación en grafos como una manera de contar. Números combinatorios – Principio general del producto. Teorema Fundamental de las relaciones de equivalencia.

Matemática

Experiencias sugeridas para desarrollar durante la formación superior

Dado que estamos convencidos que el tipo de experiencias por las cuales transita un futuro profesor en su formación es determinante para la disponibilidad de herramientas específicas que hacen a su desempeño profesional, es que consideramos necesario citar algunas experiencias esenciales para lograr los objetivos de este núcleo.

- Los estudiantes abordan problemas prácticos y teóricos. Producen fórmulas, simulan y estructuran a partir de datos intuitivos y empíricos, lo que asegura poner a funcionar el pensamiento conjetural tanto inductivo como deductivo. Se enfrentan a modelos equivalentes regulados por el contexto pero que provienen de relaciones matemáticas personales diferentes.
- Los estudiantes resuelven tareas en las que se deba reconocer que el conocimiento de algunas propiedades constituyen estrategias para la resolución de las mismas, por ejemplo cuando se usa la unicidad de la factorización en primos (propiedad aritmética) para demostrar que $\sqrt{12}$ es un número irracional.
- Los estudiantes observan, discuten y reflexionan sobre situaciones contextualizadas en distintos conjuntos numéricos sobre el carácter relacio-nal del trabajo matemático, específicamente mediante el reconocimiento de criterios que determinan relaciones entre números y su posibilidad de poder expresarlas a través de una generalización.
- Los estudiantes se enfrentan a la ampliación y profundización del rol de la recurrencia como método y como generador de nuevas nociones y propiedades para dar cuenta de su sentido y su naturaleza, a través de la provocación del bloqueo de estrategias personales para que surjan métodos de conteo óptimos.
- Los estudiantes exploran conjuntos donde se pierde la unicidad de la factorización para encontrar sentido a la exigencia de esta propiedad en el conjunto de los números naturales y enteros.
- Los estudiantes abordan situaciones que "obliguen" a hacer funcionar distintas definiciones de un concepto. Reflexionan sobre la equivalencia lógica de las mismas y la diferencia de relaciones matemáticas puestas en juego en cada situación. Por ejemplo situaciones donde alcance que el máximo común divisor funcione como el mayor de los divisores comunes, o cuando se necesite para su resolución la propiedad aritmética del MCD de ser múltiplo de todos los divisores, o se requiera la factorización en primos o la producción de un algoritmo para encontrarlo.
- Los estudiantes confrontan, comunican, argumentan y justifican los diferentes modelos numéricos y aritméticos que se empleen en la resolución de situaciones reflexionando sobre el lenguaje apropiado tanto para la representación como para el surgimiento de nuevos objetos.
- Los estudiantes reconocen diferentes métodos de demostración y los utilizan apropiadamente.

Un ejemplo de consigna para trabajar en alguna experiencia del tipo de las descriptas

Las tareas que se planteen como generadoras de saberes de este núcleo, deben apuntar a que se visualicen cambios y evolución de significados de los objetos numéricos y aritméticos identificados en el esquema gráfico como mínimos necesarios. Para poner en evidencia estas diferencias de significados desde el funcionamiento de las tareas, es necesario tomar como contextos de reflexión lo argumental, el lenguaje, las propiedades y los procedimientos que generan.

Para avanzar en esta dirección consideramos esencial acercarnos a la comprensión de los saberes matemáticos planteando diferentes contextos de uso, no siendo posible privilegiar, en un principio, ninguno de ellos. Se trata de expresar enunciados "tipos" como representantes y de este modo de llevar adelante un "avance" en el tratamiento didáctico-matemático de un problema de enseñanza en consonancia con las hipótesis que enmarcan este documento.

A continuación presentamos una rica situación problemática que permite ser trabajada en este marco es la denominada "Un torneo de ping-pong"[19].

19 Esta situación está basada en un "Pequeño estudio matemático" propuesto por Chevallard, Bosch y Gascon, 1997 en "Estudiar Matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje". Edit. Horsori.

Cuestión inicial

Un instituto organiza un torneo de ping-pong en forma de liga. La comisión organizadora debe decidir cuántos días durará el torneo, los horarios de los partidos, el número de mesas que necesitarán, el tipo de premios, etcétera. Dado que se dispone de un presupuesto limitado, hay que realizar un estudio previo de lo que costará la organización del evento.

Las decisiones que hay que tomar dependen del número de partidos que jugarán en la liga, en la que cada jugador juega una vez contra todos los demás. Los organizadores dudan entre poner o no un límite al número de inscripciones, por miedo a que una avalancha de jugadores haga totalmente inviable la realización del torneo. Para ello necesitan prever cuál será el número total de partidos que se jugarán a partir del número de jugadores inscriptos.

Consigna

En un torneo de ping-pong se inscribieron cierta cantidad de jugadores. ¿Cuál será el número total de partidos que se realizarán en el torneo si cada jugador juega una vez con cada uno de los jugadores inscriptos?

Este problema exige, en un principio, poner a funcionar un pensamiento no-deductivo, obliga la elaboración de una conjetura, más específicamente, de una relación general que dé cuenta del número total de partidos que se jugarán en el torneo en función del número de jugadores que se inscriban. Es un problema que permite diversas vías de estudio. Sin embargo en este momento nos interesa distinguir que diferentes modos de abordar el problema va a permitir a los estudiantes a enfrentarse con distintos modelos numéricos y aritméticos que den cuenta de su resolución, apuntando así a algunos de los elementos que se han problematizado en este núcleo. En efecto, un proceso que permite calcular el número total de partidos en este caso, se puede generalizar para n jugadores, por ejemplo, a partir de lo que sucede para algunos casos, obteniéndose así la conjetura $T = 1 + \ldots + (n - 2) + (n - 1)$ siendo n la cantidad de inscriptos y T la cantidad de partidos. Esta equivalencia, sometida a un cambio de lenguaje (para nada concebido como una simple traducción), permite expresar esa suma como $\sum_{i=1}^{n-1} i$, atrapando así un nuevo significado de la expresión, la que ahora expresa la suma de los n - 1 primeros números naturales, surgiendo de esta manera un nuevo problema aritmético, para el que se propone avanzar hasta lograr la expresión: $T = \frac{n(n-1)}{2}$ que efectivamente dará la solución al problema.

Pero también vale rescatar la posible construcción de otro modelo que también permite contar los partidos, considerando las combinaciones de n elementos tomados de a 2 el cual no sólo permite dar respuesta al problema sino que nos coloca ante un modelo que nos provee el mismo conjunto solución que el anterior, a sabe: $\binom{n}{2}$ .Este modelo combinatorio está soportado y regulado por la confección de diagramas de árbol.

Cabe aclarar que con este tipo de trabajo se pretende aportar al reconocimiento reflexivo, por parte de los futuros profesores, de dos modelos lógicamente equivalentes, pero que no producen las mismas relaciones matemáticas: el modelo aritmético y el combinatorio. En otras palabras éste puede ser un camino posible para enfrentarse con prácticas matemáticas que permite poner en juego distintos tipos de relaciones matemáticas, que los propios estudiantes pueden reconocer, emergentes de variadas acciones personales sobre una misma situación.

Ahora bien, objetivados ambos modelos como herramientas que resuelven un mismo problema, la continuación de este trabajo debe apuntar a la profundización y estudio de las relaciones matemáticas que ambos modelos atrapan.

Una forma posible podría ser enfrentar a los estudiantes con nuevas situaciones donde se usen y funcionen necesariamente sendos modelos, con el objetivo de hacer explícitas e identificar las relaciones internas en cada uno de ellos. Para ello ostramos un sintético tratamiento a dos nuevas tareas/situaciones/problemas.

Para profundizar el estudio del primer modelo, el aritmético, seleccionamos una tarea[20] que apunta a la construcción de fórmulas generales cerradas; al establecimiento del paso inductivo, a la elaboración de conjeturas que relacionan números y a la utilización de la escritura algebraica y configuración geométrica como apoyos posibles para la construcción y validación de fórmulas.

a) Explorar las posibles disposiciones geométricas que podrían utilizarse para acomodar las naranjas de un cajón en una verdulería. Preparar un informe explicando las posibilidades y conveniencias para el dueño.

b) Luego de elaborado el informe diseñar una actividad para estudiantes de nivel secundario vinculada con esta temática. Fundamentar las decisiones de las consignas y la secuencia determinada.

Este tipo de consigna expresa un problema de los denominados clásicamente "abiertos", que permite distintas soluciones, enfoques, búsqueda de datos, técnicas, ya que los estudiantes pueden resolverlo usando disposiciones planas o espaciales e incluso pueden utilizar recursos informáticos.

Lo que se pretende es que los estudiantes exploren la situación. Esta consigna permite que se tomen decisiones, siempre reguladas por el contexto y por los conocimientos disponibles, tales como: elegir disposiciones planas o espaciales, determinar formas geométricas (por ejemplo triángulos rectángulos, cuadrados, pirámides, etc.), analizar cantidades de naranjas con las cuales en la disposición dada no sobraría ninguna, considerar rangos de naranjas "que sean razonables" para una verdulería y presentar las respuestas ajustadas a ese dato real. Podrían vincular con la superficie que ocupa en la verdulería y rápidamente llegarían a que les conviene una disposición espacial, etcétera.

Esta tarea, al dar lugar a formas diferentes de trabajo, asegura que aparezcan diferentes niveles en cuanto: a la validación de reglas generales; a la aparición de procesos de construcción de leyes generales, con mayor o menor grado de control y de entender las razones de la fórmula encontrada; a la diversidad de estrategias y al manejo de fórmulas generales, que todas adquieren sentido en términos del problema.

También permite poner en funcionamiento varios juegos de marcos y distintos registros de representación: el marco geométrico si se consideran las áreas de triángulos y cuadrados; el marco numérico si se emplean las diferentes operaciones con números naturales y la búsqueda de relaciones entre términos de una sucesión; el registro gráfico si se utiliza representaciones de triángulos y cuadrados, que pueden aparecer como fuente de conjeturas, guía de justificaciones o instrumentos de control y el marco algebraico si se designa a los valores numéricos desconocidos con letras que toman sentido para los estudiantes en el contexto o si se escriben relaciones usando letras y números o a partir de las justificaciones que pueden surgir para mostrar cómo funcionan las distintas generalizaciones.

Por otra parte, a lo largo de la resolución de este problema se pueden enfrentar con diferentes aspectos del concepto de fórmula: como la expresión para contar o medir algo variable, a partir de una variable independiente, cuando se busca la fórmula cerrada para números triangulares y cuadrados; como la expresión de una relación entre distintas expresiones variables, por ejemplo cuando se busque la fórmula que relaciona números triangulares y cuadrados y como una relación entre distintos valores de una misma cantidad, por ejemplo cuando se busque una fórmula recurrente, todas posibilidades éstas que pueden aparecer cuando piensen y decidan en el marco del inciso (b). Obviamente durante el proceso de enseñanza se deben hacer concientes cada uno de estos cambios de significados conjuntamente con las relaciones numéricas y aritméticas que lo hacen posible.

En cuanto al uso más frecuente del segundo modelo en cuestión, el combinatorio, podemos elegir alguna tarea[21] que "obligue" a contar sin enumerar, para que no haya dudas que relaciones atrapadas por la siguiente expresión: $\binom{n}{2}$ donde lo que interesa conocer son exactamente la cantidad de subconjuntos de dos

20 Un análisis pormenorizado de esta tarea para el nivel secundario se encuentra en la Tesis de Maestría en Didáctica de la Matemática perteneciente a Nora Zon (2004) UNRC.

21 Referirse a literaturas específicas tales como: Becker, Pietrocola, Sánchez, (1996), Notas de Combinatoria. Red Olímpica. Bs. As.

elementos que se pueden formar con n elementos, lo verdaderamente interesante, es la composición de los pares no influyendo el orden de los mismos.

El proceso de validación de ambas proposiciones generalizadas conlleva obligadamente a la producción de una demostración, tomando así un sentido intramatemático el Principio de Inducción Matemática, como así también el proceso de estructuración de problemas "similares" el cual permite producir fórmulas generadoras de ciertos tipos de números, tales como los factoriales, los que se deben transformar, en el transcurso de estos procesos de enseñanza, en nuevos objetos de estudio.

Criterios para reconocer avances en la comprensión de los contenidos

Mapa de progreso

Las operaciones como relaciones. Los conjuntos numéricos y sus operaciones. La recurrencia. Descriptores del alcance de la comprensión		
Nivel I. Alpromediar la formación inicial	**Nivel I. Al finalizar la formación inicial**	**Nivel III. En los primeros años del desempeño profesional**
Reconoce, fundamenta y reflexiona, acerca de la operación de división, operación que va adquiriendo características propias en los distintos conjuntos numéricos (N, Z, D y Q) hasta lograr que la división exacta esté definida para cualquier número racional. Explora, conjetura, valida y demuestra propiedades aritméticas a partir de situaciones problemáticas que permitan la producción de fórmulas equivalentes. Se enfrenta con diferentes aspectos del concepto de fórmula: como la expresión para contar o medir algo variable, a partir de una variable independiente; como la expresión de una relación entre distintas expresiones variables y como una relación entre distintos valores de una misma cantidad. Hace funcionar distintas definiciones de una noción aritmética obtenida a partir de diferentes relaciones puestas	Produce e interpreta demostraciones a partir de diferentes conocimientos aritméticos que han sufrido, a lo largo de la formación inicial, procesos de algebrización. Reflexiona acerca de la relación que existe entre el conteo aritmético y geométrico, argumentando con criterios lógicos en la búsqueda de soluciones a los problemas. Conoce desde los aportes de la historia otros sistemas de numeración que difieren del decimal; reflexiona sobre los sistemas no posicionales, posicionales y su importancia para la enseñanza de nuestro sistema. Establece relaciones entre distintos conjuntos numéricos munidos de diferentes operaciones a partir de las propiedades que se mantienen invariantes. Reconoce la importancia y utiliza con carácter operativo el Teorema fundamental de relación de equivalencia para	Reconoce el valor práctico de los conjuntos numéricos para contar y medir y el valor teórico de los mismos que permiten por ejemplo aproximar cualquier número R a partir de los D. Toma decisiones didáctico-matemáticas para pasar del estudio por ejemplo de la división en conjuntos discretos o densos (N, Z, D o Q) a la división sobre conjuntos continuos (R). Emplea los procesos recurrentes y de generalización para generar secuencias didácticas que permitan el ingreso al álgebra con algún sentido para los estudiantes: propuesta para la producción de fórmulas que cuenten colecciones, para formular y validar conjeturas sobre números y operaciones. Usa distintos métodos para favorecer el acercamiento a la comprensión de conceptos, por ejemplo a la introducción

Nivel I. Alpromediar la formación inicial	Nivel I. Al finalizar la formación inicial	Nivel III. En los primeros años del desempeño profesional
en juego en variadas situaciones. Analiza la equivalencia entre ellas. Resuelve problemas planteados en conjuntos discretos haciendo funcionar los procesos recurrentes y el Principio de inducción como método tanto de generación de fórmulas como de números especiales y herramienta de demostración, respectivamente. Utiliza las propiedades numéricas conocidas para dar lugar, fundamentalmente a través de la búsqueda de regularidades, a la construcción de nuevas relaciones entre números y por ende nuevas propiedades aritméticas. Aproxima los números irracionales por números decimales. Explora, conjetura y demuestra enunciados que dan exis-tencia, plantean unicidad y por ende caracterizan el uso y funcionamiento de los números enteros y ciertas operaciones definidas en ellos (por ejemplo el Teorema del algoritmo de la división, el Teorema Fundamental de la Aritmética). Usa distintos tipos de lenguaje para soportar y regular su actividad matemática sobre números, conjuntos y operaciones. Utiliza distintas estrategias heurísticas, como la particularización, la organización de la información en tablas o gráficos, el ensayo y error, en la resolución de situaciones problemáticas. Utiliza las formas de pensamiento lógico para formular o comprobar conjeturas, realizar inferencias o deducciones que permita comprender el valor formativo de una teoría de números.	contar elementos de conjuntos que son identificados por su estructura algebraica. Utiliza con fluidez las propiedades aritméticas de Z y Zn como modelos principales para estudiar, por ejemplo, la fortaleza de ser grupos cíclicos. Concibe a los números enteros como una estructura donde la factorización única de sus elementos es la propiedad que los caracteriza y lo diferencia de otros conjuntos numéricos. Reconoce la potencia del lenguaje simbólico como un instrumento esencial tanto para la producción como para la comunicación matemática.	como objeto de enseñanza de la variable. Genera fórmulas recursivas y emplea software para la construcción de propuestas de enseñanza. Por ejemplo, calcular una aproximación de π al inscribir polígonos regulares en una circunferencia de radio 1 utilizando una planilla de cálculo partiendo de un hexágono regular de lado 1. Elabora secuencias didácticas que pongan al descubierto cómo la divisibilidad es un camino fructífero para comprender cómo "se hace", "se dice" y "se valida" en Matemática. Analiza críticamente desde los puntos de vista matemático y didáctico diferentes tareas que permitan abordar en el aula la exploración, la generación de conjeturas, la validación, el tratamiento de las definiciones y propiedades de los distintos conjuntos numéricos. Reflexiona sobre las resoluciones de los estudiantes e interviene para promover el avance en la resolución de un problema, en su descontextualización y por ende en la promoción de procesos de generalización, teniendo en cuenta el conocimiento de los estudiantes. Estudia los avances en las investigaciones en didáctica de la aritmética y del álgebra.

Núcleo 4: Lo algebraico

Presentación del núcleo

Al momento de pensar en cómo presentar las cuestiones algebraicas para la formación de un futuro profesor de Matemática, y en consonancia con el enfoque presentado en este documento, intentamos identificar aspectos centrales que permiten o permitieron el avance en el conocimiento en este campo.

Aunque lo algebraico aparece subyacente en todas las áreas de la Matemática por su utilidad en términos de manifestarse útil para generalizaciones, realizar demostraciones, modelizar, etc., presenta problemáticas propias que han permitido la construcción y evolución de conceptos y técnicas propias de este campo.

Una mirada histórica del desarrollo algebraico ubica indudablemente a la resolución de ecuaciones como un asunto de central importancia, que fue abordado con diversidad de recursos y enfoques y con distintos grados de aproximación en distintos momentos de la historia. Podemos mencionar que en sus inicios, las ecuaciones no revestían grado de generalidad, fueron frecuentemente formuladas coloquialmente y resueltas mediante tratamientos particularizados numéricos o geométricos. Ya en la modernidad, aparecen resoluciones aproximadas obtenidas mediante métodos numéricos, incluso desarrollados computacionalmente y se agrega el estudio de ecuaciones con coeficientes que pertenecen a distintos tipos de conjuntos numéricos. El trabajo alrededor de la resolución de ecuaciones fue generador de gran parte del conocimiento algebraico.

En los últimos siglos, parte del interés surgido en el Álgebra giró hacia el estudio de estructuras algebraicas como medio para identificar y plasmar cuestiones que ofrecen una mirada común para conjuntos que en apariencia no compartirían nada. Así se reconocen en conjuntos de elementos muy diferentes, propiedades comunes que, solo mediante el uso de un enfoque unificador puede decirse que comparten estructura. Esto provocó grandes avances en el desarrollo algebraico motivado por un interés inicial de índole puramente matemática, en contraposición a lo ocurrido con la resolución de ecuaciones, más ligada inicialmente a problemas prácticos.

Aunque en sus comienzos las ecuaciones no lineales tuvieron un rol relevante en el Álgebra, con el tiempo aparece la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones lineales con cantidades arbitrarias de ecuaciones y de incógnitas. Esto condujo a un desarrollo de técnicas y nociones específicas con tanta utilidad que se dio origen a una nueva rama: el Álgebra Lineal. La utilidad de esta nueva rama no solo se dio al interior de la Matemática sino en múltiples aplicaciones a otros campos, como ser la optimización, la teoría de juegos o la Economía, por mencionar algunos.

Por otra parte, el estudio de las ecuaciones no lineales y sistemas de ellas también siguió su camino, desarrollándose nuevos resultados teóricos, técnicas y enfoques tan variados como específicos. Podemos mencionar las técnicas para resolver ecuaciones polinómicas de grado tres y los desarrollos teóricos que derivan en la imposibilidad de generalizar lo anterior a las de grado superior a cuatro.

Si ahora nos ubicamos en pensar en la enseñanza del Álgebra, deberíamos agregar otras consideraciones. En un principio, las diferentes interpretaciones usadas para el término "Álgebra", por ejemplo:

- El Álgebra para la generalización / abstracción de relaciones.
- El Álgebra como instrumento para modelar problemas y resolverlos.
- El Álgebra como herramienta de validación y regulación del proceso de modelización.
- El Álgebra como estudio de entes formales y su manipulación siguiendo reglas sintácticas.
- El Álgebra como estudio de estructuras abstractas.

Estas distintas interpretaciones entrecruzan las dimensiones de objeto y de instrumento de los objetos matemáticos y se interrelacionan de tal manera que sólo un adecuado equilibrio entre ellas y el desarrollo de capacidades relativas a cada una permiten una comprensión profunda del significado, la finalidad y la estructura del Álgebra y del razonamiento algebraico y su utilización.

En concordancia con la posición que sostenemos a lo largo de todo el documento, mencionamos algunas cuestiones didácticas a considerar en la formación docente.

En particular, enfatizamos el cuidado que se requiere sobre:

- **La construcción del significado de los conceptos algebraicos.**
  La presentación a los estudiantes del Álgebra como un cuerpo de conocimientos ya estructurado les impediría encontrar el camino de construcción de los significados y comprender la forma en que se generan los conocimientos, lo cual resulta necesario para que el futuro profesor comprenda y oriente el aprendizaje de sus estudiantes; por eso, durante la formación inicial no deberían estar ausentes la intuición, la formulación de conjeturas y el razonamiento de tipo inductivo como elementos indispensables de la actividad matemática, intimadamente relacionados con los procesos de formalización. De este modo, sugerimos que los primeros contactos de los estudiantes con el Álgebra se relacionen con las nociones algebraicas que han construido durante sus estudios anteriores, dotando de nuevos significados a los objetos con que han venido trabajando en las etapas previas de su formación, probablemente en forma mecánica. Consideramos que la apropiación y comprensión de las estructuras algebraicas como objeto de estudio requiere de un trabajo previo sobre las propiedades de las operaciones en diferentes campos reconociendo aspectos comunes de modo de tener elementos que sean generalizables en lugar de presentar contenidos como casos particulares de una estructura general a la que no se le puede asignar significado. Del mismo modo sería conveniente que otras nociones abstractas y generales del Álgebra (relaciones, clases de equivalencia, etcétera) se presentaran con posterioridad al estudio de temas que provean una variedad de ejemplos y contextos de uso suficiente como para dar sentido a la constitución de dichas nociones.
- **El acceso a formas y usos convencionales del lenguaje simbólico.**
  La necesidad de comunicar la Matemática por medio del lenguaje simbólico es, como mencionamos en la introducción, uno de los acuerdos epistemológicos que en este núcleo adquiere relevancia por la especificidad del mismo. Cabe señalar que el lenguaje contiene una doble función: es un elemento para la comunicación y un elemento para pensar. Disponer de un lenguaje y poder ponerlo en uso requiere de cierto convencimiento y confianza que incluye comprender que ese lenguaje comunica bien las relaciones que se quieren señalar. En tal sentido, poder acceder al lenguaje convencional de la Matemática necesita de la discusión sobre diversas formas de lenguaje construidas en contextos de resolución de tareas analizando sus potencialidades y limitaciones. De esta manera, los objetos más convencionales del lenguaje y sus posibilidades de manipulación se construyen como herramientas para dar solución a ciertas problemáticas.
- **La distinción entre la generalización como producto de un proceso inductivo y la generalización de resultados en Matemática.**
  Una actividad típicamente matemática es intentar generalizar resultados obtenidos bajo ciertas condiciones a otras nuevas más abarcativas. Este es un uso del término "generalización" que es apropiado trabajar durante la formación y que no es para nada exclusivo del Álgebra. Por otra parte, se da otro uso al término "generalización" en el Álgebra haciendo referencia a formulaciones genéricas que describen ciertas regularidades. Este último uso de la generalización en Álgebra habilita a que el estudiante reconozca regularidades, formule un enunciado más general, a modo de conjetura y estudie su validez (entendiendo que podría tener un campo de validez no universal).

Con estas consideraciones, seleccionamos los siguientes como sub-núcleos.

- Lo lineal. Estudio de las ecuaciones lineales.
- Lo no lineal. Estudio de las ecuaciones no lineales.
- Lo estructural. Búsqueda de propiedades comunes de las operaciones en conjuntos

Algunas preguntas que ahondan en los interrogantes centrales que se presentan en el esquema, son las siguientes.

- ¿Cuáles fueron las razones históricas y epistemológicas que motivaron la necesidad de resolver ecuaciones y la construcción y estudio posterior de las estructuras algebraicas?
- ¿Por qué es necesario formalizar algebraicamente las nociones de función, ecuación, operación?
- ¿Cuáles son las características del Álgebra que permiten comprenderla como un instrumento de modelización matemática?
- ¿Cómo abordar la resolución de distintos tipos de ecuaciones?

Objetivos específicos de aprendizaje

- Resolver ecuaciones polinómicas empleando como herramientas diferentes técnicas que involucran transformaciones algebraicas, sustituciones, fórmulas resolventes, etcétera.
- Analizar en diferentes campos numéricos la existencia y número de soluciones de situaciones problemáticas propuestas.
- Interpretar la relación parámetro-variables tanto en la práctica como en la teoría asociada, manipulando fórmulas que conducen a la utilización del lenguaje funcional.
- Comprender a algunos aspectos de la relación entre la Geometría, el Análisis y el Álgebra Lineal.
- Comprender que la variación en los procedimientos de construcción con regla y compás desemboca en procedimientos de la geometría analítica.
- Comprender y utilizar los conceptos básicos del Álgebra Lineal para resolver problemas matemáticos o de aplicaciones a otras áreas
- Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos y métodos algebraicos.
- Conocer desde una perspectiva operacional e intuitiva la teoría de conjuntos y la lógica.
- Familiarizarse con algunas de las estructuras más importantes como: grupos, anillos, espacios vectoriales, cuerpos.
- Reconocer la noción de homomorfismo como manera de relacionar estructuras y construir nuevos objetos.
- Conocer y aplicar resultados vinculados con polinomios con coeficientes de distintos conjuntos numéricos.
- Resolver ecuaciones polinómicas utilizando fórmulas resolventes, sustituciones, transformaciones algebraicas, ecuaciones diofánticas, métodos del álgebra lineal numérica, etcétera.
- Comprender la naturaleza y el propósito de los sistemas axiomáticos.
- Comparar y contrastar el conjunto de los números reales y sus diversos subconjuntos respecto a sus características estructurales.
- Utilizar los isomorfismos como instrumentos que viabilizan la identificación de una misma estructura en conjuntos dotados de operaciones con apariencias muy distintas, a partir de sus propiedades algebraicas.
- Contextualizar las nociones de grupos, anillos, espacios vectoriales, cuerpos en el problema de la resolución de ecuaciones.

A continuación presentamos el esquema recordando la importancia de leerlo vinculado al resto de los elementos incluidos en el núcleo y considerando las fuertes relaciones que vinculan los núcleos entre sí.

Formas de apropiación: Conjeturar argumentar, generalizar, axiomatizar.

Demostraciones; métodos directos e indirectos.

Inducción completa

Algoritmos y técnicas específicas y su justificación

Exhaustividad en la resolución de ecuaciones.

Uso del lenguaje simbólico y expresión en otros lenguajes.

Resolución de problemas de otros campos de la Matemática (teoría de juegos, cadenas de Markov, etc.)

Uso reflexivo de recursos tecnológicos.

Las formas cuadráticas
Autovalores y autovectores de una matriz. Expresión de una cónica y de una cuádrica en forma canónica

Vincula con los núcleos "Lo numérico y Lo aritmético", "Lo geométrico" y "Lo analítico"

Conjuntos
Relaciones y Funciones
Morfismos. Isomorfismos
Relaciones de equivalencia y de orden.
Permutaciones. Estructuras algebraicas

Vincula con los núcleos "Lo numérico y aritmético", "Lo analítico", "Lo probabilístico y lo estadístico"

LO LINEAL
Estudio de las ecuaciones lineales
¿Qué significa resolver la ecuación $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = 0$ o un sistema de ecuaciones de ese tipo para coeficientes en determinados conjuntos?
¿Qué propiedades e interpretación geométrica tiene el conjunto solución?
¿Cómo optimizar funciones sujetas a restricciones dadas por inecuaciones lineales?

LO NO LINEAL
Estudio de las ecuaciones no lineales
¿Qué significa resolver $P(x) = 0$, siendo P un polinomio?
¿Cómo se relaciona la factorización de un polinomio con la resolución de ecuaciones polinómicas?
¿Cómo reconocer cónicas o cuádricas dadas por ecuaciones polinómicas?

Vincula con los núcleos "Lo geométrico" y "Lo analítico"

LO ESTRUCTURAL.
Búsqueda de propiedades comunes de las operaciones en conjuntos
¿Qué propiedades tienen las operaciones definidas en un conjunto?
¿Qué caracterizaciones de los conjuntos son posibles a partir de las propiedades de sus operaciones?
¿Qué transformaciones entre conjuntos en los que se han definido una o más operaciones, conservan la estructura?

Vincula con el núcleo "Lo geométrico"

El Álgebra Lineal
Espacios vectoriales. Subespacios y variedades lineales. Bases y dimensión.
Sistemas de ecuaciones lineales. Transformaciones lineales.
Diagonalización de matrices. Autovectores y autovalores.
Optimización lineal. Método Simplex

Vincula con el núcleo "Lo numérico y lo aritmético"

Las ecuaciones polinómicas
Resolución de ecuaciones polinómicas. La resolución de ecuaciones a lo largo de la historia (avances, dificultades, vínculo con otros campos)
Factorización de polinomios. Polinomios irreducibles. Teorema Fundamental del Álgebra. Operaciones y propiedades de las operaciones entre polinomios de grado menor o igual que n, entre matrices, entre las raíces n-ésimas de la unidad, etc.
Extensiones de cuerpos.

Experiencias sugeridas para desarrollar durante la formación superior

Entre las experiencias tendientes a que los estudiantes alcancen la comprensión de los aspectos señalados en este núcleo, destacamos las siguientes.

Los estudiantes

- Realizan actividades de reconocimiento de patrones en secuencias (numéricas o geométricas) que permiten la generalización y la formulación mediante expresiones algebraicas.
- Formulan conjeturas y emplean la argumentación, la prueba, la refutación, el ejemplo y el contraejemplo para su validación o rechazo.
- Resuelven problemas en los que el literal es usado como incógnita, como variable y como parámetro.
- Utilizan ejemplos extraídos de la historia del Álgebra para identificar distintas categorías de interpretación y uso de las letras.
- Resuelven problemas que permiten la inducción o interpretación de las propiedades de las operaciones y de identidades algebraicas en un contexto geométrico.
- Modelizan distintas situaciones y fenómenos empleando expresiones algebraicas y ecuaciones, interpretan los resultados obtenidos en el contexto en que surgen y analizan su validez atendiendo al dominio de definición y la factibilidad de los resultados.
- Analizan producciones algebraicas en las cuales puedan detectar errores y obstáculos en la manipulación de expresiones algebraicas. Explican los errores, los corrigen y proponen actividades remediales.
- Resuelven una misma ecuación mediante técnicas diferentes y describen las ventajas y desventajas de cada una de ellas (por ejemplo, la resolución de ecuaciones cuadráticas factorizando, completando cuadrados o utilizando la fórmula resolvente).
- Proponen la ampliación sucesiva de los conjuntos numéricos a partir de la necesidad de resolver ciertas ecuaciones algebraicas.
- Interpretan geométricamente las ecuaciones y el conjunto solución de un sistema de ecuaciones.
- Analizan ejemplos de resolución de ecuaciones tomados de la historia del Álgebra. (por ejemplo, el método de la falsa posición o "regula falsi" de los egipcios; los procedimientos de aplicación de áreas de los griegos). Los interpretan usando las notaciones actuales y discuten las técnicas utilizadas y sus limitaciones.
- Discuten la existencia de soluciones de ecuaciones relacionadas con problemas clásicos.
- Analizan situaciones que permitan percibir las diferencias entre el enfoque aritmético y algebraico en la resolución de problemas y reconocer los puntos de apoyo y de ruptura entre la aritmética y el álgebra.
- nvestigan la construcción histórica de un determinado objeto algebraico, identificando las distintas etapas de su evolución y reconociendo los obstáculos epistemológicos. Discuten las dificultades esperables al abordarlo en la educación media y formulan o analizan propuestas de superación.
- Realizan investigaciones bibliográficas -sobre un tema en particular, sobre los problemas que dieron origen a un concepto, sobre los rudimentos de desarrollos teóricos claves en el avance del conocimiento algebraico y presentan la producción resultante en forma escrita y oral.
- Participan en discusiones en las que se analicen y justifiquen procedimientos o resoluciones.
- Utilizan software informático con distintos propósitos: resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, optimización lineal, etcétera.

Un ejemplo de consigna para trabajar en alguna experiencia del tipo de las descriptas

La siguiente actividad[22] nos permitiría reflexionar con los futuros profesores sobre la potencia de pensar en las propiedades de los números al pertenecer a un conjunto con estructura conocida y generalizar así, por ejemplo, una técnica

22 La actividad es una reformulación de una propuesta utilizada por el Dr. Antonio Cafure en la asignatura Álgebra, del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de General Sarmiento.

muy conocida cuando se la pone a funcionar en algunos números del conjunto de los números reales tal como lo es la racionalización de denominadores.

1. Consideremos al número $\dfrac{3}{7-\sqrt{5}}$.

La forma usual para racionalizar denominadores que proponen los textos de Matemática para el nivel medio consiste en multiplicar y dividir por $7+\sqrt{5}$. Verificar que también puede racionalizarse el denominador si se multiplica y divide por …

a) $-7-\sqrt{5}$; b) cualquier múltiplo racional de $7-\sqrt{5}$

2. ¿Cuál es el sentido de "racionalizar denominadores"?

3. Consideremos al número $\dfrac{3.\sqrt[3]{3}}{1+2.\sqrt[3]{3}-3.\sqrt[3]{9}}$. Nos interesa analizar cómo racionalizar su denominador.

a) Verificar que el denominador no es nulo.

b) Mostrar que el tipo de procedimiento utilizado en A no es útil aquí. Es decir, mostrar que multiplicando y dividiendo por expresiones que resulten de cambiar el signo de los términos que involucran radicales del denominador, no se racionaliza el denominador.

c) Teniendo en cuenta que $\sqrt[3]{3}$ es una solución de la ecuación $\alpha^3-3=0$, explorar la posibilidad de que dada cualquier expresión en α con coeficientes racionales, siempre se pueda obtener alguna expresión equivalente a ella que sea de grado menor que la misma. Establecer una conjetura. Para ello, pensar por ejemplo en simplificar expresiones como

a) $2+3\alpha^2+\dfrac{5}{2}\alpha^4-7\alpha^{10}$

b) $-400.\alpha^{80}-5\alpha^2+2\alpha^3-\dfrac{2}{5}\alpha^4-4\alpha^5$

c) $(-\alpha^4+3-4.\alpha^{39}-\alpha^{130}).(\alpha^{20}+5\alpha^{35})$

d) Lo observado en el ítem anterior sugiere que cualquier expresión que involucre sumas y productos de racionales con α puede expresarse como un elemento del conjunto:

$$Q(\alpha)=\{a+b\alpha+c\alpha^2 : a, b, c \in Q\}$$

Como los elementos de este conjunto pueden sumarse y multiplicarse, podemos analizar si el conjunto tiene alguna estructura conocida.

Mostrar que $Q(\alpha)$ es un grupo abeliano, que los elementos de $Q(\alpha)$ pueden multiplicarse y que $Q(\alpha)$ es un anillo conmutativo.

e) Teniendo en cuenta que el polinomio $p(x)=x^3-3$ es irreducible en $Q[x]$, mostrar que si $r \in Q[x]$ es un polinomio no nulo que se anula en α, entonces r es múltiplo de p.

f) Verificar que $Q(\alpha)$ es un espacio vectorial sobre Q y que $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ es una base de $Q(\alpha)$.

g) Volviendo a lo central de la actividad C), que es racionalizar el denominador del número dado, nos planteamos lo siguiente.

Queremos encontrar un elemento de $Q(\alpha)$, de la forma $(a+b\alpha+c\alpha^2)$, tal que el siguiente producto sea racional, es decir queremos eliminar α de la expresión (1)

$$(1+2\alpha-3\alpha^2).(a+b\alpha+c\alpha^2) \quad (1)$$

Encontrar las coordenadas, en la base $\{1, \alpha, \alpha^2\}$, del elemento que se obtiene en (1).

h) ¿Qué condiciones deben imponerse a los valores de las coordenadas obtenidas, si lo que se quiere es eliminar α? Resolver el sistema de ecuaciones que resulta de plantear dichas condiciones.

i) Hallar el inverso multiplicativo de $(1+2\alpha-3\alpha^2)$.

j) Resolver el problema inicial, es decir, racionalizar el número $\dfrac{3.\sqrt[3]{3}}{1+2.\sqrt[3]{3}-3.\sqrt[3]{9}}$.

Criterios para reconocer avances en la comprensión de los contenidos

Mapa de progreso

<table>
<tr><th colspan="3">Lo lineal. Estudio de las ecuaciones lineales.
Lo no lineal. Estudio de las ecuaciones no lineales.
Lo estructural. Búsqueda de propiedades comunes de las operaciones en conjuntos.
Descriptores del alcance de la comprensión</th></tr>
<tr><th>Nivel I. Alpromediar la formación inicial</th><th>Nivel I. Al finalizar la formación inicial</th><th>Nivel III. En los primeros años del desempeño profesional</th></tr>
<tr><td>Da sentido a la notación y uso de las letras y símbolos.
En el contexto de diversas tareas, como la de modelización:
• utiliza el lenguaje simbólico;
• utiliza el lenguaje gráfico, coloquial o geométrico al enfrentar enunciados dados en lenguaje simbólico; y
• manipula expresiones algebraicas (las reconoce, opera con ellas, las expresa en una forma u otra según convenga) y justifica las acciones que realiza.</td><td>Usa con solvencia el lenguaje simbólico y las herramientas involucradas en la operatoria con expresiones algebraicas para generalizar situaciones, formular conjeturas y propiedades, expresar procesos aritméticos y producir demostraciones.
En el contexto de diversas tareas, como la de modelización:
• selecciona adecuadamente los lenguajes simbólico, coloquial, gráfico, etcétera, para comunicar sus producciones; y
• manipula expresiones algebraicas (las reconoce, opera con ellas, las expresa en una forma u otra según convenga) y justifica las acciones que realiza.</td><td rowspan="3">Reconoce los obstáculos que enfrenta el estudiante de la escuela secundaria para el aprendizaje del Álgebra en relación con el uso de las letras y los símbolos y diseña situaciones de aprendizaje pertinentes para superarlos.
Esquematiza una organización para la enseñanza del lenguaje simbólico a lo largo de la escolaridad media.
Prevé y explica errores en la manipulación de las expresiones algebraicas por parte de sus estudiantes y propone actividades para su tratamiento.
Propone una vía de entrada al aprendizaje del álgebra en el nivel secundario, fundamentando su decisión.
Realiza una lectura crítica de la vía de entrada al Álgebra propuesta en la bibliografía escolar.
Elabora situaciones de aprendizaje que contemplen la ruptura que implica el pasaje de la aritmética al álgebra
Elabora secuencias didácticas que atiendan a la construc-</td></tr>
<tr><td colspan="2">La evolución se expresa en la precisión matemática de la manipulación.</td></tr>
<tr><td>Generaliza regularidades y propiedades observadas en el campo numérico atendiendo a su dominio de validez, en distintas situaciones tanto de la Matemática como extra-matemáticas.</td><td>Demuestra la validez de regularidades y propiedades observadas en el campo numérico.</td></tr>
</table>

Nivel I. Alpromediar la formación inicial	Nivel I. Al finalizar la formación inicial	Nivel III. En los primeros años del desempeño profesional
La evolución se expresa a través de la complejidad de las situaciones.		ción del sentido de los distintos usos del literal en álgebra.
Maneja los distintos usos del literal en Álgebra (como incógnita, como variable o como parámetro) y selecciona la más apropiada, según la tarea a resolver.	Maneja los distintos usos del literal en Álgebra (como incógnita, como variable o como parámetro) y selecciona la más apropiada, según la tarea a resolver.	Diseña actividades de aprendizaje de las ecuaciones en el nivel secundario, tanto para un acercamiento inicial como para diagnosticar aprendizajes en cursos previos.
La evolución se expresa a través de la complejidad de las situaciones.		Selecciona y propone problemas que se modelizan mediante sistemas de ecuaciones.
En sistemas de ecuaciones polinómicas: resuelve, interpreta las nociones de solución y de conjunto solución, verifica. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales en el plano e interpreta geométricamente sus soluciones. Resuelve sistemas de ecuaciones no lineales en el plano e interpreta geométricamente sus soluciones.	Resuelve ecuaciones polinómicas utilizando distintas técnicas (fórmulas resolventes, sustituciones, transformaciones algebraicas, ecuaciones diofánticas, etcétera). Anticipa la existencia y número de soluciones de una ecuación polinómica en un cierto campo. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales en espacios de n dimensiones e interpreta geométricamente sus soluciones. Resuelve sistemas de ecuaciones no lineales en espacios de n dimensiones e interpreta geométricamente sus soluciones.	Planifica la enseñanza de los polinomios en la escuela media a a través de situaciones que no la limiten a la operatoria con ellos y a su factorización mediante los casos clásicos Propone situaciones y fenómenos que se pueden modelizar utilizando distintos tipos de funciones. Decide, con fundamento, la inclusión o no inclusión de la enseñanza de las estructuras algebraicas en un curso inicial de Álgebra en el nivel superior Propone problemas que faciliten la construcción del concepto de linealidad de una transformación. Crea un entorno en el que se expliciten las decisiones acerca de los límites de la rigurosidad, formalismo y precisión en el lenguaje para el trabajo matemático en el aula Construye con sus estudiantes en clase un sistema de propiedades que se tomarán como base para producir argumentaciones, formular y validar nuevas propiedades Reconoce conocimientos incompletos o inadecuados de los estudiantes y diseña situaciones que habiliten cambios de estrategias necesarios para superarlos.

Nivel I. Alpromediar la formación inicial	Nivel I. Al finalizar la formación inicial	Nivel III. En los primeros años del desempeño profesional
Factoriza polinomios para graficar, simplificar, etcétera.	Factoriza polinomios con variedad de elementos teóricos y relaciona la factorización de un polinomio con las raíces del mismo. Conoce la evolución histórica de la noción de factorización y las ideas centrales de los desarrollos teóricos que se generaron a partir de ella.	Planifica la enseñanza de los polinomios en la escuela media a a través de situaciones que no la limiten a la operatoria con ellos y a su factorización mediante los casos clásicos.
Reconoce relaciones funcionales y utiliza para representarlas distintos registros. Extrae información a partir de gráficas de funciones. Representa y describe fenómenos devariación y cambio.	Reconoce la expresión algebraica y la representación gráfica de distintos tipos de funciones, traduciendo de un registro a otro.	Propone situaciones y fenómenos que se pueden modelizar utilizando distintos tipos de funciones.
	Reconoce la estructura algebraica de ciertos conjuntos al definir estudiar operaciones en ellos. Aprecia cómo las estructuras algebraicas expresan aspectos comunes de situaciones diversas y facilitan el establecimiento de la red de relaciones internas de la disciplina.	Decide, con fundamento, la inclusión o no inclusión de la enseñanza de las estructuras algebraicas en un curso inicial de Álgebra en el nivel superior.
Adquiere los conceptos, propiedades y técnicas básicas del Algebra Lineal y los aplica al estudio de problemas específicos.	Aplica los conceptos, propiedades y técnicas básicas del Algebra Lineal a la resolución de problemas de diversas áreas, especialmente la Geometría. Utiliza los conceptos, propiedades y técnicas básicas del Algebra Lineal en la elaboración de modelos matemáticos adecuados para abordar situaciones problemáticas de diversas áreas. Analiza ejemplos variados de espacios vectoriales y reconoce la potencia de esta estructura para englobar entes matemáticos diversos y para sistematizar la Geometría elemental.	Decide, con fundamento, la inclusión o no inclusión de la enseñanza de las estructuras algebraicas en un curso inicial de Álgebra en el nivel superior.
Reconoce transformaciones lineales y utiliza los conceptos y propiedades asociados.	Reconoce transformaciones lineales y utiliza los conceptos y propiedades asociados.	Propone problemas que faciliten la construcción del concepto de linealidad de una transformación.

Nivel I. Alpromediar la formación inicial	Nivel I. Al finalizar la formación inicial	Nivel III. En los primeros años del desempeño profesional
Formula conjeturas. Selecciona argumentos adecuados para justificar la verdad de una cierta proposición, basándose en definiciones, axiomas o propiedades ya conocidos. Realiza deducciones sencillas. Da ejemplos y contraejemplos.	Comprende las características de los sistemas formales. Realiza demostraciones formales de propiedades matemáticas. Conoce las características y límites de la validación en la escuela secundaria.	Crea un entorno en el que se expliciten las decisiones acerca de los límites de la rigurosidad, formalismo y precisión en el lenguaje para el trabajo matemático en el aula Construye con sus estudiantes en clase un sistema de propiedades que se tomarán como base para producir argumentaciones, formular y validar nuevas propiedades
Estudia el origen y evolución históricos de las nociones matemáticas. Representa y describe fenómenos devariación y cambio.	Estudia el origen y evolución históricos de las nociones matemáticas y lo relaciona con la existencia de obstáculos epistemológicos.	Reconoce conocimientos incompletos o inadecuados de los estudiantes y diseña situaciones que habiliten cambios de estrategias necesarios para superarlos.

Núcleo 5: Lo probabilístico y lo estadístico

Presentación del núcleo

En la actualidad es necesario tener conocimientos probabilísticos y estadísticos para poder interpretar los mensajes de la comunicación social, comprender o redactar un informe de una investigación científica, construir modelos para fenómenos de distintas ciencias, entender indicadores de uso común en la Economía, la Demografía o en la Educación, tales como índice de desocupación, tasa de natalidad, índice de deserción, etcétera.

Muchos de los primeros fenómenos estudiados por las ciencias eran deterministas; entre ellos problemas químicos, eléctricos, astronómicos, mecánicos, hidrostáticos, y diversos más; los cuales se pueden pronosticar con certeza y modelizar con conceptos de otras áreas de la Matemática.

Sin embargo, posteriormente, otros fenómenos tales como problemas de la Física Cuántica, la Mecánica Estadística de los gases, la Meteorología, la Biología Molecular, la Genética, etcétera, fueron descriptos con modelos probabilísticos, al menos momentáneamente.

Muchos problemas actuales de la ciencia, la naturaleza o la sociedad, tales como la posibilidad de padecer una enfermedad si estamos sometidos a algún factor de riesgo, la ganancia o pérdida en un juego de azar, o la necesidad de contratar seguros de vida y sobre bienes, no son susceptibles de ser resueltos con certeza. Por lo tanto, las personas ocupan una parte importante de su tiempo en prever, conjeturar o adivinar acontecimientos sobre los que no tienen control. Muchas decisiones están basadas más bien en la creencia o en la esperanza de que cierto acontecimiento suceda, que en las teorías científicas.

Sin embargo, para tomar decisiones racionales o informadas, es necesario cuantificar esa creencia o confianza. El proceso de precisar numéricamente la posibilidad de que ocurra algún evento aleatorio, transporta al terreno científico, y más precisamente a la Probabilidad, que cuantifica el grado de certidumbre de un suceso.

Los modelos probabilísticos permiten describir no sólo situaciones aleatorias sino también algunas deterministas en las que aparece variabilidad debido a la falta de precisión en el proceso de medición. Aunque la Estadística proporciona contrastes que nos permiten "validar" el modelo propuesto, no nos proporciona una regla para decidir con certeza si aceptamos o no el modelo como el correcto, porque a lo sumo conocemos la probabilidad de cometer un error. Y puesto que esta probabilidad nunca será igual a cero, siempre hay un margen de error, aunque el riesgo sea pequeño. Esta es una característica importante del razonamiento estadístico, que los modelos permiten controlar la incertidumbre y conocer los riesgos que asumimos de antemano, pero no anulan la incertidumbre.

Por otra parte, desde que los pueblos se organizaron como estados, sus gobernantes necesitaron conocer diversos aspectos relacionados con la población, tales como la natalidad, mortalidad, crecimiento de la población, producción agrícola o ganadera, bienes, y muchos otros, ya sea con el fin de recaudar impuestos o de tomar decisiones para modificar las condiciones de vida de los ciudadanos.

En la actualidad, el uso de la Estadística se ha ampliado a casi la totalidad de las áreas del conocimiento, proporcionando métodos y técnicas útiles para la recolección y el análisis de información, la predicción, la estimación y la toma de decisiones en presencia de incertidumbre. Por lo tanto, el futuro docente debe conocer aplicaciones en distintas áreas, para poder abordar o ejemplificar problemas relacionados con las diferentes modalidades de la enseñanza secundaria, usar los conceptos para interpretar el mundo de hoy y los fenómenos y resultados de su práctica docente con cierto rigor científico, utilizarlos para la toma de decisiones en una sociedad que está cambiando rápidamente, o comprender los resultados obtenidos en equipos interdisciplinarios de investigación.

La aparición de contenidos vinculados a la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística en los planes de estudio puede explicarse por la importancia que ha adquirido en los últimos años, tanto como cultura básica, como en el trabajo profesional y en la investigación.

Las investigaciones en cualquier área de la ciencia pueden ser de distintos tipos o tener diversos fines: descriptivos, inferenciales, explicativos o predictivos. Los estudios descriptivos ponen su foco en la descripción o caracterización de una situación, lo que se hace a través de la recolección, organización y presentación en tablas de la información; el cálculo de medidas resúmenes, que sintetizan la información, y la representación gráfica de los datos con el fin de evidenciar tendencias, variabilidad, asimetrías u otras características que pueden permanecer ocultas en los datos. Estas técnicas de organización, síntesis y representación de la información constituyen la Estadística Descriptiva. Por su parte, en los estudios inferenciales el interés está centrado en obtener conclusiones referidas a la población a partir de una muestra. Por ejemplo, estimar el valor promedio de una variable en la población, o comparar sub-poblaciones en cuanto a su media o su variabilidad. Para lograr estos objetivos, la Estadística Inferencial clásica aporta diversos métodos de estimación de parámetros y pruebas para contrastar hipótesis. A su vez, las investigaciones explicativas y predictivas están interesadas en encontrar un modelo que relacione a las variables en estudio, determinar la/s variable/s que mejor expliquen a otra o predecir el comportamiento futuro de una variable conociendo el comportamiento de otra/s.

Lo anteriormente expuesto da sentido a la consideración de tres sub-núcleos al interior del núcleo, que constituyen distintos enfoques o miradas en un estudio vinculado a lo aleatorio.

Los sub-núcleos considerados son los siguientes.

- Lo aleatorio y lo determinístico.
- Lo descriptivo y lo inferencial.
- La explicación y la predicción.

Presentamos algunas preguntas que clarifican el desarrollo del núcleo.

- ¿Cuáles son las características de un experimento aleatorio?
- ¿Cómo se puede explorar la aleatoriedad, para comprender sus propiedades?
- Cuando el espacio muestral es discreto, ¿cómo se determina su cardinalidad?
- ¿Cuáles son las diferentes definiciones de probabilidad? ¿Cuáles son las ventajas o desventajas de cada una?
- ¿En base a qué criterios se seleccionan los axiomas que definen la probabilidad?
- ¿Cómo se asigna una probabilidad a sucesos correspondientes a espacios muestrales continuos?
- ¿Qué características debe tener una situación para ser modelada por medio de un modelo probabilístico?
- ¿Cuáles son las etapas que se deben seguir para la selección de un modelo que permita describir una situación aleatoria?
- ¿Cuáles son las características de cada modelo probabilístico?
- ¿Qué tan dispersos están los valores que asume la variable?
- ¿Cuál es la importancia del modelo normal?
- ¿Cómo convertir los datos en información estadística para que tengan significado y sean fáciles de interpretar?
- ¿Cuál es la medida que representa mejor los datos y permite la comprensión e interpretación de los mismos?
- ¿Cómo se seleccionan muestras válidas para obtener conclusiones acerca de la población?
- ¿Qué métodos se pueden utilizar para estimar un parámetro a partir de una muestra?
- ¿Qué estimador tiene mejores propiedades?
- ¿Depende la distribución de un estadístico de la población de origen, del tamaño de la muestra o del tipo de muestreo?
- ¿Cómo se valida estadísticamente una hipótesis?
- ¿Cuál es la probabilidad de que las inferencias formuladas en base a las muestras sean válidas?
- ¿Cómo se mide la bondad del procedimiento de estimación?
- El hecho de que dos variables estén correlacionadas, ¿significa que una es causa de la otra?
- ¿Por qué se utiliza el método de mínimos cuadrados para ajustar un modelo lineal a un conjunto de datos?
- ¿Cuáles son las características del modelo de regresión simple?
- ¿Qué porcentaje de variabilidad explican las variables independientes?
- ¿Cuál es la variable independiente que mejor explica a la variable dependiente?
- ¿Dentro de qué rango de valores se pueden hacer predicciones?
- ¿Cómo se contrastan hipótesis cuando no se cumplen los supuestos para realizar pruebas paramétricas?

Objetivos específicos de aprendizaje

- Explorar situaciones aleatorias mediante experimentación y simulación, para poder comprender las características de los fenómenos aleatorios y conjeturar propiedades.
- Reconocer la insuficiencia de la exploración y la simulación para validar propiedades, seleccionando métodos de argumentación y validación adecuados.

- Seleccionar axiomas para definir la probabilidad a partir de la exploración de las propiedades de la frecuencia relativa y teniendo en cuenta las propiedades que debe tener un sistema formal.
- Modelizar fenómenos intra y extra-matemáticos usando conceptos probabilísticos y estadísticos, con el fin de resolver problemas que requieran estudiar procesos aleatorios, explicar el comportamiento de variables, predecir resultados, etcétera.
- Explorar la posibilidad de un abordaje de la Probabilidad con estrategias lúdicas, a través de la manipulación de diversos juegos de azar y del análisis de los conceptos involucrados en ellos, con el fin de aumentar la motivación, vincular los conocimientos científicos con la realidad, favorecer la explicitación de ideas previas y su contrastación, con el objeto de lograr un cambio conceptual.
- Interpretar información de los medios de comunicación, de la práctica docente o de investigaciones científicas.
- Usar las técnicas y métodos estadísticos para recolectar, organizar, resumir, procesar y presentar información de la manera más adecuada para poder obtener conclusiones.
- Participar en el diseño y desarrollo de investigaciones con diversos fines: descriptivos, inferenciales clásicos, explicativos, predictivos.
- Interpretar los conceptos estadísticos a partir de analogías con otros relacionados, pertenecientes a otras áreas.
- Relacionar conceptos de diversas áreas de la Matemática con el fin de fundamentar la probabilidad y resolver problemas.

En la siguiente página presentamos el esquema recordando la importancia de leerlo vinculado al resto de los elementos incluidos en el núcleo y considerando las fuertes relaciones que vinculan los núcleos entre sí.

Consideramos que las actividades de enseñanza se deberían planificar de manera que ayuden a construir el concepto formal a partir de ideas intuitivas (formulación de conjeturas). Cuando se trabaja con un medio de simulación concreto (por ejemplo la perinola, los dados, las urnas, etc.) se desarrollan experiencias matemáticas que permiten al estudiante pasar de sus creencias personales a las concepciones aceptadas como válidas en el contexto de la disciplina Matemática. De este hecho, y dada la imposibilidad de repetir grandes cantidades de veces ciertos experimentos, surge la necesidad de incorporar el uso de herramientas informáticas que ayudan a resolver los problemas de cálculo y graficación, ahorran tiempo, a partir de las simulaciones favorecen la comprensión de la aleatoriedad, y otorgan medios para comunicar los resultados. Asimismo, los estudiantes deben comprender que el proceso de argumentación de resultados requiere elaborar explicaciones, una prueba o una demostración, ya que no es suficiente realizar sólo comprobaciones empíricas para dar validez a una afir-mación. Para lograr este fin se usan los diversos tipos de razonamiento -pensamiento deductivo, inductivo, analógico- tanto para el abordaje de problemas teóricos como prácticos. Se puede trabajar el razonamiento inductivo, por ejemplo, en relación a la Ley de los Grandes Números, llevando a cabo o simulando experimentos como el lanzamiento de una moneda o un dado legales, a los que van despojando paulatinamente de las cuestiones particulares para abstraer la ley.

Los estudiantes del profesorado deben hacer un uso flexible de las distintas representaciones. El lenguaje gráfico les permite organizar, describir y analizar datos, puesto que al ser un instrumento de transnumeración es una de las formas básicas de razonamiento estadístico, que consiste en obtener una nueva información, al cambiar de un sistema de representación a otro. Por ejemplo, al pasar de una lista de datos desordenada a un histograma, se visualiza la moda y se percibe la variabilidad y la asimetría de la distribución.

Razonamiento hipotético-deductivo: Definición axiomática de probabilidad.

Razonamiento plausible: conjeturar a partir de experimentos o simulaciones.

Razonamiento analógico: semejanzas de medidas resúmenes y parámetros con conceptos físicos.

Razonamiento inductivo:

Métodos numéricos para resolver problemas que no admiten solución exacta.

Métodos de estimación:

-de los momentos.

-de máxima verosimilitud.

-de Monte Carlo para la estimación de momentos e integrales.

-de mínimos cuadrados.

Modelización de fenómenos de la realidad y otras disciplinas usando conceptos probabilísticos.

Estimación, predicción, contraste de hipótesis, toma de decisiones.

Organización, resumen y present-ación de la información.

Uso flexible de distintos registros.

Presentación organizada y clara de la información, para favorecer la interpretación.

Uso de un lenguaje adecuado y adaptado al lector o interlocutor.

Argumentación de procedimientos y resultados

Vincula con los núcleos "Lo aritmético", "Lo analítico", "Lo algebraico" y "Lo geométrico"

Experimentos Aleatorios, Probabilidad y Variables Aleatorias

Experimentos aleatorios. Sucesos. Conteo. La exploración de la aleatoriedad: experimentación y simulación. Probabilidad. Propiedades. Probabilidad condicional. La fundamentación: paradojas. Independencia. Variables aleatorias discretas y continuas. Características de las distribuciones: parámetros y momentos. La modelización del mundo físico y de problemas de las ciencias.

Vincula con el núcleo "Lo analítico"

Regresión

Causalidad versus asociación. Correlación.
Regresión. Predicción
Estimación. Diagnosis y validación del modelo.
Extensiones: Modelo log-lineal y regresión logística

LO ALEATORIO – LO DETERMINÍSTICO

¿Cuáles son las diferencias entre un experimento aleatorio y un experimento determinístico?
¿Cómo se cuantifica la posibilidad de que ocurra un evento aleatorio?
¿Cómo se modelizan situaciones dónde interviene la aleatoriedad?

LA EXPLICACIÓN Y LA PREDICCIÓN

¿Existe relación causal o asociación entre las variables en estudio?
¿Cuál es la variable que mejor explica a otra?
¿Cómo se puede predecir el valor de una variable bajo condiciones de incertidumbre?

LO DESCRIPTIVO Y LO INFERENCIAL

¿Cómo se describe estadísticamente un conjunto de datos?
¿Cómo obtener información sobre las características de una población basándose en una muestra?

Vincula con el núcleo "Lo analítico"

Estadística Descriptiva

Población, muestra. Tipos de Variables. Tablas. Gráficos. Medidas estadísticas: de tendencia central y posición, de dispersión, de forma, de asociación.

Muestreo, métodos de estimación y contraste de hipótesis

Muestra aleatoria. Tipos de muestreo. Estadístico. Estimador. Propiedades. Distribuciones en el muestreo. Teorema Central del Límite. Estimación puntual y por intervalos. Estimación máximo – verosímil. Test de hipótesis para parámetros y distribuciones. Métodos no paramétricos

Experiencias sugeridas para desarrollar durante la formación superior

A continuación se presentan algunas experiencias que deberían transitar los estudiantes del profesorado de Matemática en relación a la probabilidad y la estadística.

- Los estudiantes realizan búsquedas bibliográficas para investigar las razones que provocaron el origen, las ampliaciones o modificaciones sucesivas de los contenidos. Allí analizan que los conceptos primero surgen en un contexto determinado, el matemático los descontextualiza, los formaliza, y pasan a ser parte del conocimiento científico del área y, que recién cuando han sido despojados de toda relación con los usos particulares, sirven para resolver nuevos problemas, es decir, pueden ser transferidos. Realizan un análisis histórico-epistemológico de los contenidos con el objetivo de ampliar sus concepciones epistemológicas, estudiar la posibilidad de concebir propuestas de enseñanza que recuperen distintos sentidos de los objetos, identificar cuestiones que podrían explicar algunas dificultades que pueden encontrar los estudiantes.
- Luego de haber manipulado de manera no formal la noción de probabilidad, los estudiantes se enfrentarán con la tarea de establecer un sistema axiomático. Buscarán información sobre las condiciones que un tal sistema debe cumplir. Explorarán distintas posibilidades hasta poder seleccionar axiomas que constituyan un sistema, que goce de las propiedades deseables. Es necesario que los estudiantes comprendan el proceso de elección de un axioma, si se desea la constitución de un sistema formal que goce de las propiedades de independencia, consistencia y completitud, y no que los acepten sin ninguna justificación acerca de su elección. Por ejemplo, deberían ver que no es equivalente incluir como axioma la aditividad numerable que la finita, puesto que de la primera se puede deducir la segunda, pero no recíprocamente. También pueden analizar que si se incluyen como axiomas la probabilidad del suceso imposible y el suceso seguro el sistema ya no goza de la propiedad de independencia. Pueden probar que para asegurar la independencia es suficiente considerar que $P(A) \geq 0$ y $P(S) = 1$ (siendo A cualquier evento y S el suceso seguro), y que no es necesario tomar, como a veces se considera, que para todo suceso A, $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Conocidas algunas nociones físicas, se planteará a los estudiantes hacer un resumen de tales conceptos, buscar información sobre los conceptos matemáticos vinculados a ellos y establecer relaciones y analogías. Explicarlas por escrito y oralmente. Por ejemplo, el concepto de función de masa o de densidad se puede identificar con una masa unitaria distribuida en la recta real, el concepto de esperanza con el de centro de masa, o el de varianza con el de momento de inercia respecto a un eje perpendicular a través del centro de masa. Se pedirá probar alguna propiedad estadística y vincularla con elementos físicos (como por ejemplo: la propiedad que para todo α, $V(X - \alpha) = E[(X - \alpha)^2] - [E(X - \alpha)]^2$, que se vincula al teorema de los ejes paralelos de la Mecánica, el cual asevera que el momento de inercia respecto a un punto arbitrario es igual al momento de inercia respecto al centro de masa más el cuadrado de la distancia de este punto arbitrario a dicho centro).
- Seleccionan, en base al análisis de las condiciones de una situación aleatoria, un modelo probabilístico para representarla. Resuelven la situación utilizando el modelo, interpretan la solución en el contexto original y verifican que las mismas cumplan las condiciones iniciales. Monitorean el proceso, verificando el cumplimiento de las etapas de la modelización.
- Los estudiantes obtienen datos de la experimentación, de encuestas, o realizan búsquedas de información en organismos públicos tales como el INDEC, o en sus páginas web, los cuales serán tabulados, resumidos y representados gráficamente, usando las medidas y gráficos más adecuados para cada tipo de variable y cada conjunto de datos particular.
- Realizan estudios interdisciplinarios, por ejemplo, de estadística y ciencias sociales, trabajando las pirámides de población o índices demográficos; o de estadística y educación física, donde se analicen asociaciones entre variables tales como peso, resistencia, o velocidad. Seleccionan el tipo de estudio a realizar –descriptivo, inferencial, explicativo-, proponen objetivos de la investigación, recogen los datos y usan las herramientas estadísticas adecuadas para alcanzar los objetivos fijados.
- Manipulan tanto objetos concretos como las tecnologías de la información y la comunicación, reconociéndolos como medios útiles para ex-

plorar contenidos y facilitar el estudio independiente. Entre los objetos concretos, pueden usar monedas, ruletas, perinolas, dados, cartas, aparato de Galton para estudiar la distribución binomial o tableros de distintos juegos. Por ejemplo, el concepto de esperanza matemática se puede comprender mediante el análisis de la ganancia esperada en diversos juegos de azar. A partir de la experiencia formularán conjeturas o abstraerán las propiedades, las cuales posteriormente serán demostradas con herramientas matemáticas.

- Realizan investigaciones bibliográficas (en textos de matemática superior) de los múltiples usos de un concepto y los aplican en la resolución de diversos tipos de problemas, para facilitar su posterior recuperación en diversos contextos.
- Usan recursos tecnológicos, valorando las ventajas y desventajas de los mismos. En la computadora, mediante diversas instrucciones llevan a cabo simulaciones, que consisten en sustituir un experimento aleatorio por otro equivalente. Para ello construyen un modelo que represente un fenómeno, y lo usan para explorar conceptos y principios, que de otro modo serían más difíciles de comprender, mejorando la experiencia estocástica y la intuición probabilística. De este modo adquieren una experiencia estocástica que no es fácil de alcanzar en la vida real. A la vez, descubren que se puede incrementar fácilmente el número de repeticiones, detectar patrones, repetir con facilidad el experimento cambiando los supuestos del modelo, procesar datos y representarlos con más rapidez y precisión, detectar con facilidad datos alejados permitiendo indagar las posibles causas si se desvían demasiado de los restantes.
- A partir de producciones de los alumnos de nivel secundario y superior, analizan cómo entienden los estudiantes los conceptos de causalidad, probabilidad, variabilidad, tendencias, distribuciones, en diversas edades, con el fin de diseñar actividades que les permitan construir estos conceptos sobre su comprensión actual.
- Analizan, en el caso de la inferencia, las controversias filosóficas acerca de cómo se justifica un razonamiento inductivo y los distintos enfoques teóricos de la Estadística, iniciados por Fisher, Neyman, Pearson y los bayesianos, explicando lo que se entiende por "resultado significativo", si se puede calcular la probabilidad de una hipótesis, cuál es la naturaleza de dicha probabilidad y cómo se relaciona con los datos empíricos en cada uno de los enfoques.
- Cuando usan computadoras o calculadoras para obtener números "aleatorios", que en realidad son seudo aleatorios porque son generados por algoritmos deterministas, verifican si se cumplen las condiciones teóricas. Por ejemplo, analizan la aleatoriedad de la secuencia de resultados independientemente del proceso que la generó. En particular, analizan la independencia de las pruebas sucesivas.
- Proponen modelos probabilísticos para describir en forma sintética las distribuciones empíricas de los datos y para predecir el comportamiento, tanto en situaciones aleatorias como deterministas que no pueden medirse con precisión. Por ejemplo, si distintos alumnos miden una longitud con el mismo instrumento se obtiene una variabilidad en los resultados, que no tiene su origen en el azar. Aunque esta situación no es esencialmente aleatoria, la curva normal centrada en cero describe bien los errores cometidos.

Un ejemplo de consigna para trabajar en alguna experiencia del tipo de las descriptas

Se necesitan muchas repeticiones de un experimento aleatorio para poder realizar conjeturas sobre su comportamiento, insume mucho tiempo realizar los experimentos de lanzamiento de una moneda o un dado y requiere de un registro preciso y exhaustivo, a la vez que es posible cometer errores al contar los casos favorables al suceso al manejar una gran cantidad de datos. Otras veces, un experimentador puede introducir grandes sesgos por su forma particular de arrojar la moneda o el dado. Para reducir estos efectos se puede simular el experimento, ya sea con una planilla de cálculo o una calculadora. Esta última opción no ahorra tiempo, porque hay que realizar las simulaciones una por una, pero evita sesgos que puede introducir el experimentador por su forma particular de lanzar el objeto.

Con esta actividad se espera que el estudiante realice simulaciones de experimentos aleatorios simples usando una planilla de cálculo o una calculadora, que le permitan conjeturar un enunciado que se aproxime a la Ley de los Grandes

Números (forma de Bernoulli) y argumente la diferencia entre la convergencia de una sucesión, vista en Análisis Matemático, y la convergencia en probabilidad.

Se requiere una computadora provista de una planilla de cálculo, o calculadora científica. Se supone enseñado la definición clásica de probabilidad, desigualdad de Tchebysheff, varianza de una variable aleatoria binomial, convergencia de sucesiones.

Primer momento: Los estudiantes trabajan en grupos, en clase, para responder la siguiente consigna.

a) Usando el generador de números aleatorios de la planilla de cálculo, que se encuentra como opción en Herramientas de Análisis de datos, simula el lanzamiento de una moneda legal 1.000 veces. Para ello debes introducir el número de lanzamientos que deseas realizar y la distribución de probabilidad de los resultados de la moneda. Los resultados posibles deben estar codificados en forma numérica, por ejemplo: cara = 1, sello = 0, porque la planilla sólo acepta argumentos numéricos como entrada en la distribución de probabilidad.

b) Una vez que tienes los resultados de la simulación de los 1.000 lanzamientos, cuenta con la función CONTAR. Si de la planilla de cálculo el número de caras obtenidas desde el lanzamiento 1 al 100, del 101 al 200, del 201 al 300, etcétera. Calcula la frecuencia relativa como cociente entre el número de caras obtenidas y 100 -el número de lanzamientos realizados. Calcula la frecuencia relativa acumulada dividiendo el número de caras obtenidas desde el primer lanzamiento en el total de lanzamientos realizados. Completa la siguiente tabla de las frecuencias relativas cada 100 lanzamientos y frecuencias relativas acumuladas desde el primer lanzamiento.

Cantidad de lanzamientos	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1.000
Cantidad de caras										
Frecuencia relativa										
Frecuencia relativa acumulada										

c) Representa gráficamente la frecuencia relativa y la frecuencia relativa acumulada en función del número de lanzamientos usando el asistente para gráficos de la planilla de cálculo.

d) Tabula nuevamente los resultados obtenidos pero agrupando los lanzamientos de a 50, y de a 200. Representa gráficamente. Prepara una presentación de diapositivas para mostrar a tus compañeros los resultados.

e) En base a lo observado, formula una propiedad referida al comportamiento de la frecuencia relativa a medida que crece el número de lanzamientos.

f) Explica al resto de los grupos los resultados obtenidos.

Respuestas esperadas

Los estudiantes concluirán que la frecuencia relativa se aproxima a la probabilidad del suceso cuando el número de lanzamientos es grande.

Si no se dispone de una computadora con planilla de cálculo, pero sí de una calculadora científica, reemplaza la consigna de los ítems a), b) y c) por la siguiente: Simula 100 veces el lanzamiento de una moneda con la calculadora. La misma sólo cuenta con un generador de números aleatorios uniforme en [0,1]. Entonces, para simular el lanzamiento de una moneda, cada vez que se genera un número aleatorio entre 0 y 1 con la tecla RANDOM, se considera que se obtuvo cara si el número es menor que 0,5 y sello en caso contrario, o recíprocamente. Reúne los datos con los obtenidos por los restantes grupos, tabula y realiza un gráfico con todos los resultados.

Segundo momento: trabajo individual domiciliario.

g) Busca en al menos un texto de Probabilidades y Estadística de nivel superior la Ley de los Grandes Números (forma de Bernoulli) con su demostración. Elabora un escrito.

h) Averigua qué nombre recibe el tipo de convergencia que establece esta ley, y analiza su interpretación.

Tercer momento: trabajo grupal en clase.

i) Considera la sucesión que tiene como término general $f_n(A)$, la frecuencia relativa de ocurrencia de caras hasta el lanzamiento n-ésimo. Compara la convergencia en probabilidad, de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica, con la noción de convergencia de sucesiones usada en Análisis Matemático. ¿Qué asegura cada tipo de convergencia? ¿Cuál es la diferencia entre ambas?

Respuestas esperadas

- Se espera que deduzcan que en el límite de una sucesión, una vez prefijado $\varepsilon > 0$, a partir de un cierto n natural la distancia entre los términos de la sucesión -las frecuencias relativas en este caso- y el límite -la probabilidad teórica- es menor que ε. Sin embargo, la convergencia en probabilidad –dada en la Ley de los Grandes Números- no indica nada acerca del valor de $|f_n(A) - P(A)|$; puede ser mayor, menor o igual que ε. Lo que establece esta ley es que la probabilidad de que esta distancia sea menor que ε es arbitrariamente próxima a uno.
- Se espera un trabajo autónomo, tanto en la búsqueda bibliográfica como en la interpretación de las definiciones en distintos registros: simbólico, gráfico y coloquial.
- Cabe la posibilidad de que los estudiantes aún no adviertan la diferencia entre ambos tipos de convergencia. Si esto ocurre, se les da la siguiente consigna.

Cuarto momento: trabajo grupal en clase.

j) Considera un ε pequeño, por ejemplo, $\varepsilon = 0{,}05$. Para este ε, determina el valor de n, dado por la cota de Tchebysheff, considerando $k = 3$.

Nota: se considera este valor de k porque para varias de las variables aleatorias el porcentaje de sus valores que distan menos de tres desvíos estándares de la media es aproximadamente del 100%. Por ejemplo, para la normal el 99,7% de sus valores dista de la media en menos de tres desvíos estándares.

k) Usando la planilla de cálculo, repite 100 veces el procedimiento de simular el lanzamiento de la moneda n veces, utilizando un valor de n mayor o igual al deducido en el ítem anterior. Cada vez que realices el procedimiento cuenta, usando funciones de la planilla, cuántas veces la distancia entre la frecuencia relativa y la probabilidad de cara es menor que $\varepsilon = 0{,}05$. ¿Coincide lo obtenido en las simulaciones con lo establecido en la convergencia de sucesiones?

l) Explica cuál es la diferencia entre la convergencia de sucesiones y la convergencia en probabilidad.

Respuestas esperadas

Los estudiantes determinarán para k =3, que n = $\dfrac{k^2}{4\varepsilon^2}$ = 900. Cuando repiten el procedimiento 100 veces ven que no siempre la frecuencia relativa dista de la probabilidad de cara en menos de $\varepsilon = 0{,}05$. Con estos resultados advierten que la convergencia en probabilidad no asegura que la frecuencia relativa dista menos que ε de la probabilidad cuando n es suficientemente grande, sino que con alta probabilidad esto ocurre. Además, pueden ver que el porcentaje de veces que la frecuencia relativa difiere de la probabilidad teórica en menos de ε es consistente con la cota inferior para la probabilidad, $1-\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{8}{9}$ dada por la desigualdad de Tchebysheff.

Quinto momento: trabajo grupal domiciliario que forma parte de un portafolio de evaluación.

m) Investiga y selecciona en libros de texto del nivel superior problemas relacionados con la Ley de los Grandes Números y realiza adaptaciones de éstos para estudiantes de la educación secundaria. Enuncia los criterios de selección de los problemas.

Resumen

En varias leyes de la probabilidad se observa un comportamiento asintótico, y se requieren muchas repeticiones de los experimentos para poder deducirlas a partir de la observación de los datos. De esto se deriva la importancia de realizar simulaciones, ya que permiten replicar muchas veces un experimento en poco tiempo, proporcionando una experiencia estocástica que difícilmente se pueda alcanzar con datos de la realidad.

Además, permiten a los estudiantes percibir mejor las características esenciales de la aleatoriedad, tales como las regularidades globales –convergencia de la frecuencia relativa- dentro de la variabilidad individual –diversidad de resultados posibles con carencia de un patrón que permita al sujeto predecir cuál ocurrirá. La comprensión de esta regularidad global es fundamental, pues permite estudiar los fenómenos aleatorios usando la probabilidad.

El objetivo de este ejemplo es comprender la diferencia entre la convergencia en probabilidad y la convergencia usada en el núcleo analítico. A partir de la construcción y análisis de los gráficos propuestos se puede observar no sólo la estabilización de la frecuencia relativa, sino la disminución de la variabilidad a medida que se aumenta el tamaño de muestra, lo que no implica que a partir de algún tamaño de muestra la frecuencia relativa se mantenga en un entorno de radio preestablecido alrededor de la probabilidad teórica, sino que con alta probabilidad esto ocurre, a diferencia de la convergencia vista en el núcleo analítico.

Es necesario aclarar que cuando se realizan simulaciones usando un software o una calculadora, en realidad se obtienen números seudo aleatorios, por ser generados con algoritmos deterministas. Para propósitos prácticos estos números se pueden considerar como aleatorios. Sin embargo, es posible estudiar su aleatoriedad con independencia del mecanismo que los generó, usando pruebas no paramétricas. No obstante, hay que tener en cuenta la limitación de todo contraste de hipótesis: al tener asociada una probabilidad de error, no podemos tener total seguridad de que una sucesión dada, a pesar de que pase todas las pruebas, no tenga algún tipo de patrón que los contrastes no detectaron y que no sea totalmente aleatoria.

Criterios para reconocer avances en la comprensión de los contenidos

En la siguiente matriz se presentan los criterios que permiten reconocer avances en la comprensión de los contenidos, lo que se espera en términos de aprendizaje matemático al inicio y fin de la formación docente, y al iniciar el trabajo profesional.

Mapa de progreso

Lo aleatorio y lo determinístico. Lo descriptivo y lo inferencial. La explicación y la predicción Descriptores del alcance de la comprensión

Nivel I. Alpromediar la formación inicial	Nivel I. Al finalizar la formación inicial	Nivel III. En los primeros años del desempeño profesional
Argumenta las características de los fenómenos aleatorios y la probabilidad de que ocurra un suceso discreto. Utiliza el vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar. Construye tablas de frecuencias y gráficas para representar el comportamiento de fenómenos aleatorios. Obtiene números aleatorios a partir del uso de diversos recursos y técnicas, tales como tablas, calculadoras, simulaciones con elementos concretos (dados, monedas, perinolas) y con software. Calcula probabilidades asociadas a espacios muestrales discretos finitos.	Selecciona la definición de probabilidad que más se adapte a las características de cada problema, argumentando la elección realizada. Calcula probabilidades en espacios discretos, finitos o numerables, seleccionando la técnica de conteo más adecuada para cada caso. Calcula probabilidades en espacios continuos, usando los conceptos algebraicos, analíticos o geométricos necesarios para asignar una medida al conjunto de los casos favorables y posibles. Vincula los conceptos de conteo con los de otros núcleos. Por ejemplo: el conteo de casos en la distribución binomial con el Triángulo de Pascal. Modeliza situaciones reales y de otras disciplinas usando variables aleatorias discretas y continuas. Argumenta la elección de los axiomas de probabilidad en base al análisis de las propiedades que debe cumplir un sistema formal. Calcula la ganancia esperada en distintos juegos de azar o problemas de Economía. Selecciona reglas para que un juego sea equitativo. Investiga el origen del concepto de probabilidad, comparando los métodos de resolución usados en las prime-	Formula juegos o experimentaciones que permitan a sus estudiantes explorar las características de los fenómenos aleatorios y el concepto de probabilidad. Diseña secuencias didácticas para enseñar el concepto de probabilidad y variable aleatoria, las pone en práctica, realizando el análisis a-priori y a-posteriori de las mismas. Analiza los obstáculos epistemológicos, didácticos y ontogenéticos para la revisión, elaboración, y reformulación de las secuencias didácticas. Selecciona y adapta problemas intra o extra-matemáticos para la modelización a través de conceptos probabilísticos. Formula problemas en base a juegos de azar conocidos para que los estudiantes calculen probabilidades de ganar, reconozcan si se tratan de juegos equitativos, o cambien el monto de las apuestas para obtener un juego equitativo. Propone diversos juegos o problemas, para que los estudiantes resuelvan con los métodos analizados en textos referidos al origen del concepto de probabilidad. Diseña e implementa actividades donde el estudiante haga predicciones sobre los diferentes resultados de experimentos aleatorios, luego obtenga datos empíricos y finalmente compare las probabilidades experimentales

Nivel I. Alpromediar la formación inicial	Nivel I. Al finalizar la formación inicial	Nivel III. En los primeros años del desempeño profesional
	ras aplicaciones conocidas, encontrando sus diferencias y similitudes. Experimenta y explora procesos estocásticos a partir de la simulación con computadoras observando los efectos producidos mediante las representaciones gráficas. Reconoce la insuficiencia de la experimentación o la simulación para validar propiedades, y demuestra formalmente las mismas. Analiza paradojas que contradicen la intuición y llevan a cuantificar inadecuadamente la probabilidad de que ocurra un suceso aleatorio, descubriendo y fundamentando el error cometido.	con sus predicciones. Gestiona situaciones de enseñanza a partir del rol de mediador, promoviendo situaciones de aprendizaje que involucren distintos momentos (de argumentación, validación, debate colectivo, puesta en común, devolución). Diseñan actividades para que sus alumnos tomen conciencia de las heurísticas que ponen en juego al resolver problemas probabilísticos. Estas reducen la complejidad de un problema probabilístico, suprimiendo parte de la información, ayudando en algunos casos a obtener una solución aproximada al problema, pero que en otros casos producen sesgos en las conclusiones obtenidas y las decisiones tomadas. Por ejemplo: la falacia del jugador.
Maneja técnicas de recolección de datos. Construye gráficos simples para presentar un resumen de datos de tal manera que muestren las características notables de las variables. Realiza una lectura literal de la información del gráfico. Identifica y aplica los procedimientos que permiten calcular las distintas medidas resúmenes que describen el conjunto de datos y comunican algunas de sus características notables, utilizando los algoritmos tradicionales, la calculadora y la computadora.	Selecciona el gráfico y la medida resumen más adecuados al tipo de variable y datos disponibles. Construye gráficos respetando las convenciones para cada tipo. Interpreta gráficos más allá de una lectura literal, reconociendo variabilidad, asimetrías y tendencias. Usa los datos de manera exploratoria, para formular conjeturas que pueden ser contrastadas recolectando y analizando otros datos.	Diseña y pone en práctica secuencias didácticas para enseñar los conceptos de Estadística Descriptiva, las pone en práctica, realizando el análisis a-priori y a-posteriori de las mismas. Formula actividades referidas a la forma óptima de presentar y resumir los datos a partir de información de los medios de comunicación, de libros de otras áreas o de páginas web de organismos públicos.
Realiza una lectura literal de la información del gráfico. Identifica y aplica los procedimientos que permiten calcular las distintas medidas resúmenes que describen el conjunto de datos y comunican algunas de sus caracterís-	Usa las nuevas tecnologías como instrumento de cálculo y representación gráfica, para analizar datos. Recoge, organiza, depura, almacena, representa y analiza sistemas de datos de complejidad accesible, identificando	Asesora a equipos de estudiantes o profesores de otras áreas, del nivel secundario, en la selección de los gráficos y las medidas que mejor resumen los resultados de sus investigaciones. Diseña actividades que permitan a sus estudiantes reali-

Matemática

Nivel I. Alpromediar la formación inicial	Nivel I. Al finalizar la formación inicial	Nivel III. En los primeros años del desempeño profesional
ticas notables, utilizando los algoritmos tradicionales, la calculadora y la computadora.	la población, las unidades de análisis, las variables y las categorías de las mismas. Identifica el tipo de estudio estadístico, las hipótesis y las técnicas más adecuadas al caso estudiado. Estima parámetros de poblaciones a partir de una muestra, usando diversos métodos de estimación, e identificando las ventajas, desventajas y los supuestos necesarios para el uso de cada uno. Identifica las propiedades de cada estimador puntual, seleccionando el mejor en base a criterios estadísticos. Conjetura a partir de simulaciones propiedades tales como: Teorema Central del Límite, distribución muestral de la varianza, interpretación del nivel de confianza de un intervalo. Identifica las hipótesis que se deben contrastar y lleva a cabo el procedimiento correcto para seleccionar una de ellas. Detecta falacias en la formulación de afirmaciones que utilizan el lenguaje estadístico. Realiza un proyecto de análisis de datos y lo lleva a cabo siguiendo los pasos de una investigación. Analiza libros de textos, materiales curriculares, evaluaciones, registros de clases, producciones de los estudiantes, teniendo en cuenta guías elaboradas para tal fin.	zar pequeñas investigaciones, donde se puedan estimar o comparar medias de dos poblaciones, por ejemplo: si el rendimiento en Matemática es distinto en los estudiantes que hacen y no hacen la tarea. Elabora e implementa proyectos de investigación para sus estudiantes. Transfiere algunos resultados obtenidos en investigaciones educativas a la práctica docente. Analiza los obstáculos epistemológicos, didácticos y ontogenéticos para la revisión, elaboración, y reformulación de las secuencias didácticas. Elabora problemas vinculados a lo estadístico y lo probabilístico teniendo en cuenta la edad de los estudiantes, el tipo de procedimientos que se requiere para su resolución, el nivel de complejidad de la situación propuesta, las formas de argumentación y/o validación de la solución, teniendo control sobre el proceso de resolución, los marcos de abordaje, el número de soluciones, etcétera. Diseña instrumentos de evaluación para ser usados en distintos momentos del proceso formativo de los estudiantes. Organiza experiencias docentes para un abordaje de lo estadístico y lo probabilístico con distintas finalidades: talleres, seminarios, ateneos, etcétera. Diseña material didáctico con distintos formatos (impresos, videos, presentación de diapositivas, blog) para el desarrollo de sus clases, para una ponencia, etcétera.
Distingue situaciones de causalidad y de asociación sin causalidad.	Identifica si los datos obtenidos en alguna experiencia, encuesta u organismos públicos presentan una relación	Formula ejemplos o pequeñas investigaciones que permiten a los estudiantes ver que asociación no siempre

Nivel I. Alpromediar la formación inicial	Nivel I. Al finalizar la formación inicial	Nivel III. En los primeros años del desempeño profesional
Conjetura intuitivamente a partir de datos o gráficos qué variables influyen en el comportamiento de otras. Realiza inferencias intuitivas acerca del comportamiento de dos variables. Por ejemplo: cuando aumenta la independiente también aumenta la dependiente, pero sin precisiones numéricas.	lineal. En caso afirmativo, la estima, contrasta su significatividad y estudia los residuos para analizar la validez de los supuestos realizados. En caso negativo, estudia la posible incidencia de otras variables, o propone otros modelos. Predice valores de una variable, en función de los valores de otra/s, reconociendo y fundamentando el rango de validez en el que se puede realizar las predicciones. Interpreta el significado de los coeficientes de la regresión y contrasta su significatividad. Selecciona la/s variable/s que mejor explican a otra, argumentando la elección con criterios estadísticos. Analiza secuencias didácticas, identificando los supuestos en los que se basa, los problemas que resuelve cada contenido, la adaptación de los contenidos para su enseñanza, los obstáculos que intentan superar. Realiza un proyecto de investigación que involucre una relación de tipo estadístico entre variables y lo lleva a cabo siguiendo los pasos de una investigación.	significa causalidad. Confecciona secuencias didácticas para que sus estudiantes generen datos donde se presenten fuertes, moderados o débiles asociaciones entre las variables usando una planilla de cálculo, con el fin de que puedan comprender la correlación. Analiza los resultados de su práctica profesional usando métodos estadísticos. Por ejemplo, si el rendimiento de sus estudiantes está vinculado con el rendimiento en otras áreas afines, con la participación en olimpíadas, con la cantidad de horas de estudio semanales, o con alguna actividad extracurricular que realizan. Diseña actividades de investigación simples para sus estudiantes. Por ejemplo: si el rendimiento en ciertas actividades de educación física está relacionado con el peso, la masa corporal o la estatura.

Referencias bibliográficas

DE GUZMÁN, M. (2007): "Enseñanza de las Ciencias y la Matemática" en Revista iberoamericana de educación, Número 43, pp. 19-58.

PUIG, L., CALDERÓ, J. (eds.) (1996): Investigación y didáctica de las matemáticas, Madrid, Centro de Publicaciones de la Secretaría General Técnica, pp. 67-85.

Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires, Secretaría de Educación y Cultura, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Curriculum (1998): Matemática. Documento de trabajo N°5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo. Actualización curricular.

COLACELLI, S., GARCÍA, P., GARCÍA, A. M. y ZORZOLI, G. (1997): "Propuesta didáctica: ¿dónde está el punto perdido? Lápiz y papel. EGB 3° Ciclo", en Lugares geométricos Matemática 2.

COLOMBANO, V. y Rodríguez, M. (2009): "Una propuesta para atender la persistencia del modelo dinámico-práctico luego de la enseñanza de límite funcional" en Memorias del 10º Simposio de Educación Matemática, formato CD.

PIAGET, J. y GARCÍA, R. (1984): Psicogénesis e Historia de la Ciencia, Madrid, Siglo XXI.

NEWMAN, J (1997): El mundo de las matemáticas, Tomo 4, Barcelona, Grijalbo.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH M.; GASCÓN J. (1997): Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje, Barcelona, Horsori.

ZON, N. (2004): "Un análisis pormenorizado de esta tarea para el nivel secundario", Tesis de Maestría en Didáctica de la Matemática perteneciente, UNRC.